

离散数学

第七章: 图的基本概念

卢杨

厦门大学信息学院计算机科学与技术系

luyang@xmu.edu.cn



图的基本概念

- 现实世界中许多关系是由图形来**形象而直观**地描绘出来，人们常用点表示事物，**用点之间是否有连线表示事物之间是否有某种关系**，于是点以及点之间的若干条连线就构成了图模型。
- 当研究的对象能够被抽象为离散的元素集合和集合上的二元关系时，用**关系图**进行表示和处理是很方便。
- 图论研究的图是不同于几何图形、机械图形的另一种数学结构，**不关心图中顶点的位置，边的长短和曲直形状**，只关心**有多少顶点，哪些顶点之间有边**。

图的基本概念

- 称两个元素构成的集合为 $\{a, b\}$ 无序对. 设 A, B 为任意的两个集合, 称 $\{\{a, b\} \mid a \in A \wedge b \in B\}$ 为 A 与 B 的无序积, 记作 $A \& B$.
- 为方便起见, 将无序积中的无序对 $\{a, b\}$ 记为 (a, b) , 并且允许 $a = b$, 需要注意的是, 无论 a, b 是否相等, 均有 $(a, b) = (b, a)$.

例 $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$, 则

$$A \& B = B \& A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\};$$

$$A \& A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\};$$

$$B \& B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}.$$



无向图和有向图

定义 7.1

无向图 G 是一个二元组 $\langle V, E \rangle$, 其中 $V \neq \emptyset$ 称为 G 的**顶点集**, V 中元素称为 G 的**顶点或结点**; E 是**无序积** $V \times V$ 的多重子集, 称 E 为 G 的**边集**, 其元素称**无向边**, 简称**边**.

定义 7.2

有向图 G 是一个二元组 $\langle V, E \rangle$, 其中顶点集 V 同无向图中的顶点集; E 是**笛卡尔积** $V \times V$ 的多重子集, 称 E 为 G 的边集, 其元素称**有向边**, 简称**边**.

- 元素可重复出现的集合成为**多重集合**. E 中的元素可重复出现.
- 常将 V 记成 $V(G)$, E 记成 $E(G)$.
- 顶点通常用 v_1, v_2, \dots, v_i 来表示. 像这样给顶点标定记号的图称为**标定图**, 不标定几号的图称为**非标定图**.
- 在标定图中, 无向图的边通常用 (v_i, v_j) 来表示.

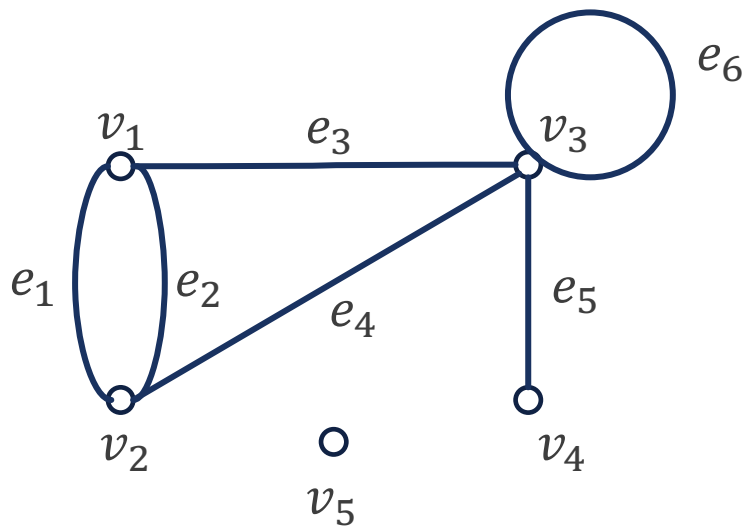


无向图和有向图

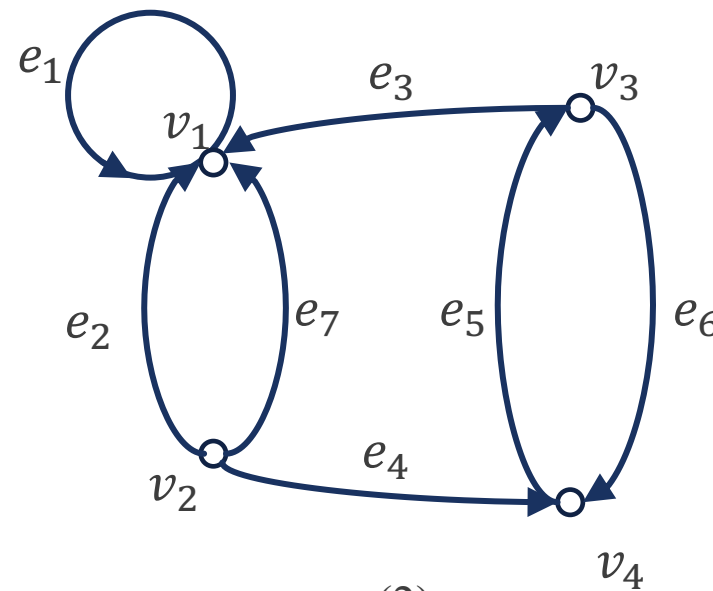
例

(1) 无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 其中 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,
 $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_3, v_2), (v_3, v_3), (v_3, v_4)\}$.

(2) 有向图 $D = \langle V, E \rangle$, 其中 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,
 $E = \{\langle v_1, v_1 \rangle, \langle v_2, v_1 \rangle, \langle v_3, v_1 \rangle, \langle v_2, v_4 \rangle, \langle v_4, v_3 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle, \langle v_2, v_1 \rangle\}$.



(1)



(2)



图的基本概念

关于无向图和有向图说明如下:

- (1) 在无向图中, 无向边 (a, b) 是顶点 a 与 b 之间的线段, 无方向. 在有向图中 $\langle a, b \rangle$ 是有方向的, a 称为**起始顶点**, b 称为**终止顶点**. 用从 a 指向 b 的箭头表示.
- (2) 无论是在无向图还是有向图中, 常用字母 e_i 表示表示边. 例如无向图的 $e_k = (v_i, v_j)$, 以及有向图中的 $e_k = \langle v_i, v_j \rangle$.
- (3) 无向图和有向图统称为图. 但也常**把无向图简称为图**. 通常用 G 表示无向图, D 表示有向图. 但有时用 G 泛指一个图 (无向的或有向的), 可是 **D 只能表示有向图**.
- (4) 本课程只讨论有限图, 即顶点集和边集都是有穷集. 如果图 G 中既有无向边, 又有有向边, 则称 G 为**混合图**. 本课程不讨论混合图.
- (5) 若 G 的顶点集 V 的元素个数 $|V| = n$, 则称 G 是 **n 阶图**.



图的基本概念

(6) 若边集 $E = \emptyset$, 即没有边, 则称 G 为**零图**. 此时, 若 $|V| = n$, 则称 G 为 **n 阶零图**; 若 $|V| = 1$, 则称 G 为**平凡图**.

(7) 设 $e_k = (v_i, v_j)$ 为无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中的一条边, 称 v_i, v_j 为 e_k 的**端点**, e_k 与 v_i, v_j 是彼此**相关联**的. 无边关联的顶点称为**孤立点**. 若一条边所关联的两个顶点重合, 则称此边为**环**.

- a. 若 $v_i \neq v_j$, 则称 e_k 与 v_i 或 v_j 的**关联次数**为1;
- b. 若 $v_i = v_j$, 则称 e_k 与 v_i 的**关联次数**为2;
- c. 若 v_l 不是 e_k 的端点, 则称 e_k 与 v_l 的**关联次数**为0;

(8) 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 若存在一条边 $e_k = (v_i, v_j)$, 则称 v_i 与 v_j **彼此相邻**的, 简称**相邻**的. 若 e_k 与 e_l 至少有一个公共端点, 则称 e_k 与 e_l **彼此相邻**的, 简称**相邻**的.

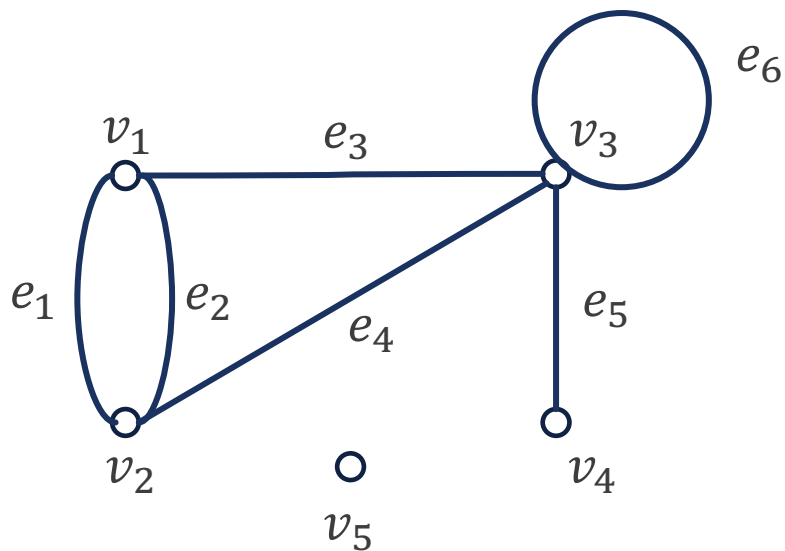
(9) 设 $e_k = \langle v_i, v_j \rangle$ 为有向图 $D = \langle V, E \rangle$ 中的一条边, 除称 v_i, v_j 为 e_k 的端点外, 还称是 v_i 的 e_k **始点**, v_j 是 e_k 的**终点**, v_i **邻接到** v_j , v_j **邻接于** v_i .



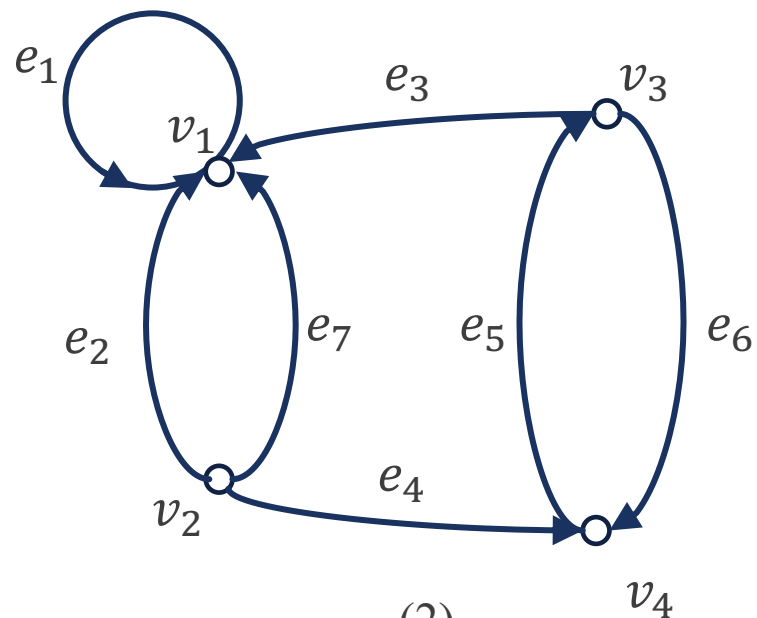
图的基本概念

例

- 图(1)中, v_5 是孤立点, e_6 是环, e_1, e_2, e_3 与 v_1 的关联次数均为1, 而 e_6 与 v_3 的关联次数为2.
- 图(1)中, v_1 与 v_4, v_5 不相邻, v_1 与其他顶点都是相邻的. e_5 与 e_1, e_2 不相邻, 与其他边均是相邻的.
- 图(2)中, $e_4 = \langle v_2, v_4 \rangle$, v_2 是 e_4 的始点, v_4 是 e_4 的终点. v_2 邻接到 v_4 , v_4 邻接于 v_2 .



(1)



(2)



图的基本概念

- 由于图的顶点位置和边的长度的**任意性**，一个图的图形表示**并不是唯一的**。
- 图论只关心图有多少个顶点，哪些顶点之间有边连接。
- 顶点的标号和位置，边的长短和曲直都**不改变图连接的本质**。从连接的意义，它们本质上都是一样的，可以把它们看成是同一个图的不同表现形式。

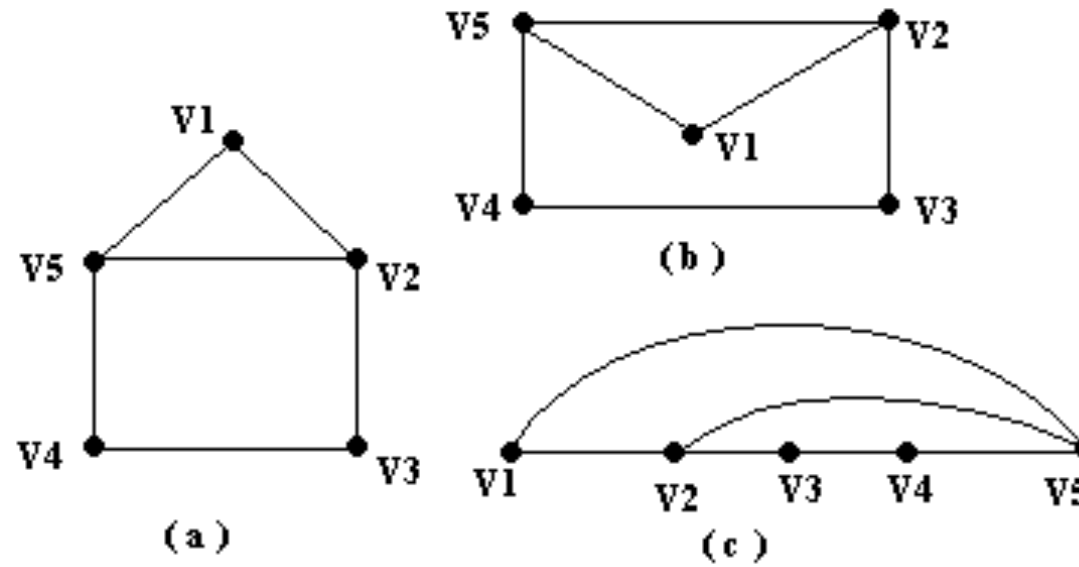


图的基本概念

例 无向图 G 中, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$;

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\},$$

G 的图可分别画成下图的(a), (b)和(c)



多重图与简单图

定义 7.4

在无向图中，关联一对顶点的无向边如果多余1条，称这些边为**平行边**，平行边的条数为**重数**。

在有向图中，关联一对顶点的有向边如果多余1条**并且它们的方向相同**，则称这些边为**有向平行边**，简称平行边。

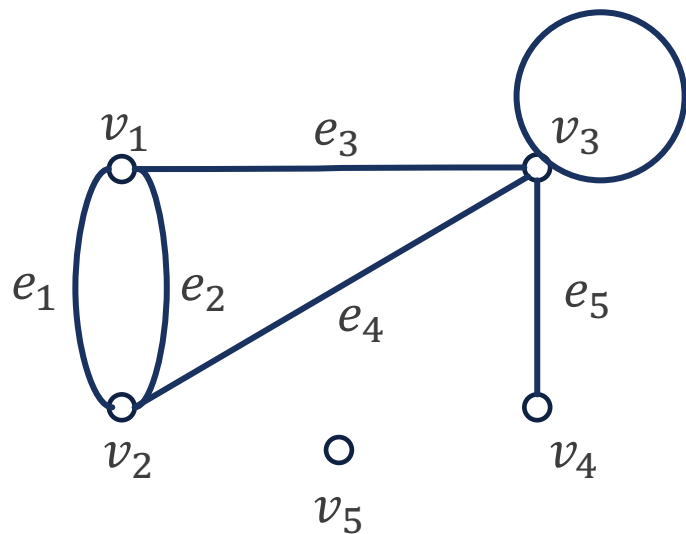
含平行边的图称为**多重图**。**既不含平行边也不含环**的图称为**简单图**。



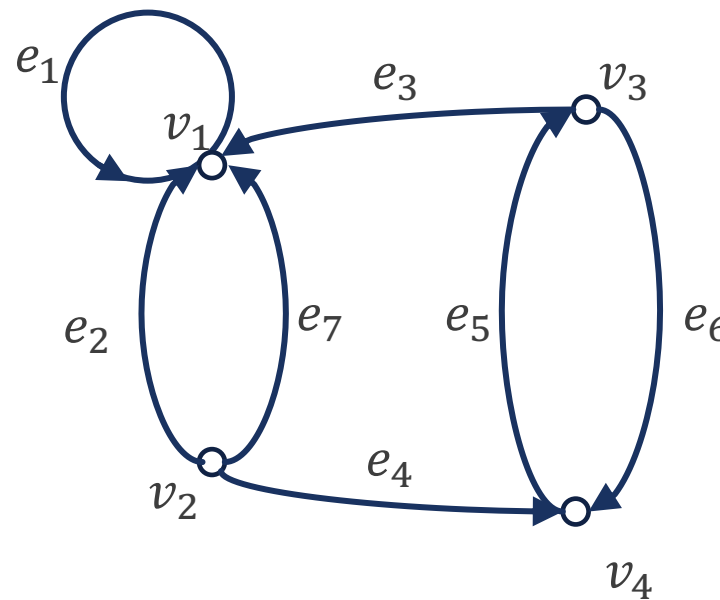
多重图与简单图

例

- 图(1)中, e_1 与 e_2 是平行边. 该图既有平行边, 又有环, 是多重图, 不是简单图.
- 图(2)中, e_2 与 e_7 是平行边, 但 e_5 与 e_6 不是平行边 (方向不同).



(1)

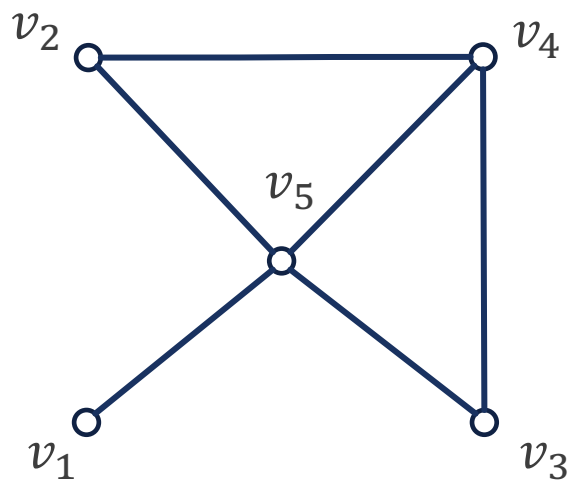


(2)

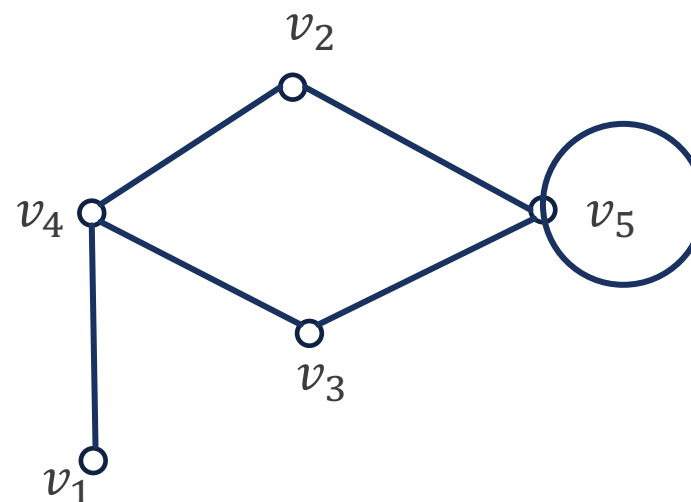
多重图与简单图

例

- 图(1)既无平行边, 又无环, 因而是简单图.
- 图(2)无平行边, 但是含环, 因而不是简单图.



(1)



(2)



度

定义 7.3

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 对于任意的 $v \in V$, 与 v 关联的边数之和称为 v 的**度数**, 简称为**度**, 记作 $d_G(v)$, 或简记为 $d(v)$.

- 每个环提供给它的端点2度.

定义 7.3.1

设有向图 $D = \langle V, E \rangle$, 对于任意的 $v \in V$, 以 v 为始点的边数之和称 v 的**出度**, 记作 $d_D^+(v)$; 以 v 为终点的边数之和称 v 的**入度**, 记作 $d_D^-(v)$.

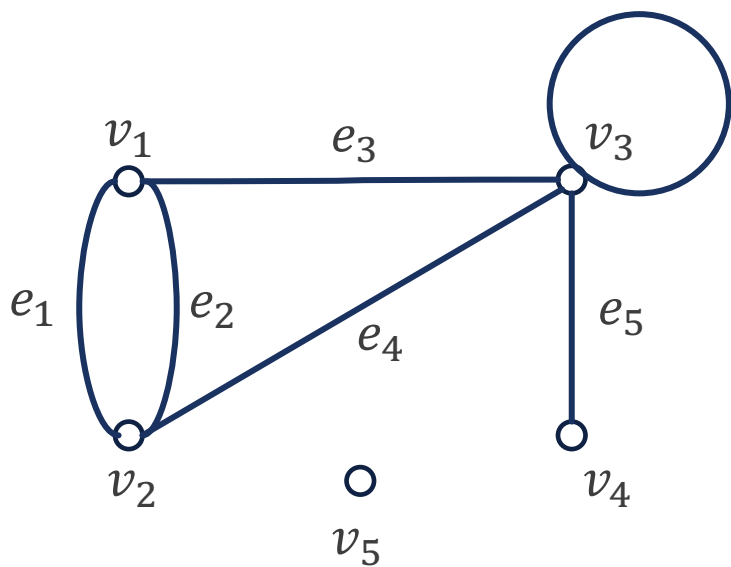
- 显然, $d_D^+(v) + d_D^-(v) = d_D(v)$
- 称度数为1的顶点为**悬挂顶点**, 与它关联的边为**悬挂边**.



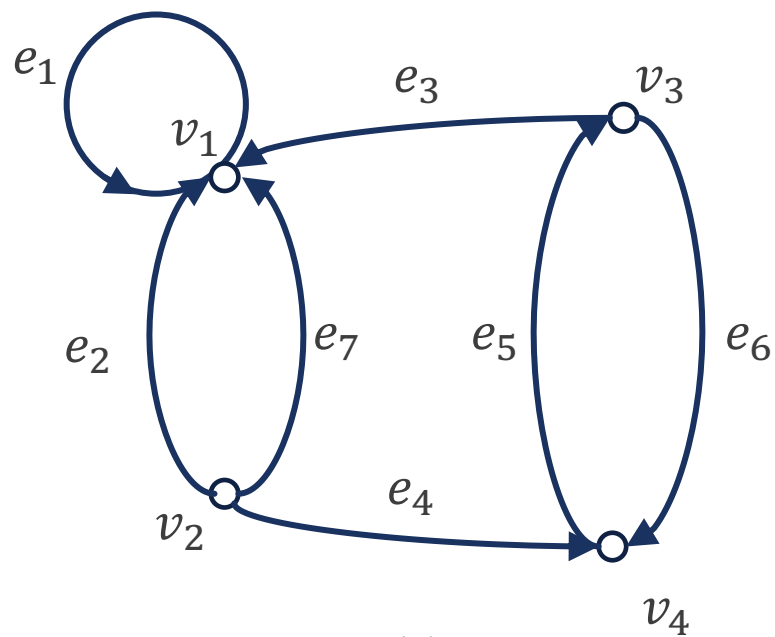
度

例

- 图(1)中, $d(v_1) = d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 5$, $d(v_4) = 1$, $d(v_5) = 0$. v_4 是悬挂顶点, e_5 是悬挂边.
- 图(2)中, $d^+(v_1) = 1$, $d^-(v_1) = 4$, $d(v_1) = 5$, $d^+(v_2) = 3$, $d^-(v_2) = 0$, $d(v_2) = 3, \dots$



(1)



(2)



度

- 设 G 为无向图, 令

$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\},$$

$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\},$$

称 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别为 G 的**最大度数**和**最小度数**.

- 一个顶点的度是一个**局部的**性质, 而 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 是**全局的**.
- 若 G 为 n 阶**无向简单图**, 则对于 $\forall v \in V$, 有
$$0 \leq \delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G) \leq n - 1.$$



- 设 D 为有向图, 类似可定义 $\Delta(D)$ 和 $\delta(D)$ 为 D 的最大度和最小度,

$$\Delta^+(D) = \max\{d^+(v) \mid v \in V(D)\},$$

$$\delta^+(D) = \min\{d^+(v) \mid v \in V(D)\},$$

$$\Delta^-(D) = \max\{d^-(v) \mid v \in V(D)\},$$

$$\delta^-(D) = \min\{d^-(v) \mid v \in V(D)\},$$

依次称为 D 的**最大出度**、**最小出度**、**最大入度**、**最小入度**。

- 若 D 为 n 阶**有向简单图**, 则对于 $\forall v \in V$, 有

$$0 \leq \delta(D) \leq d(v) \leq \Delta(D) \leq 2(n - 1).$$



图的基本定理

定理 7.1 (握手定理)

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为任意一图 (有向的或无向的), $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 边的条数 $|E| = m$, 则

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m.$$

证明 在 G 中的每一条边 (包括环) 均有两个端点, 所以在计算 G 中各顶点度数之和时, 均提供 2 度, 因而 m 条边共提供 $2m$ 度.

定理 7.2

设 $D = \langle V, E \rangle$ 为一有向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 边的条数 $|E| = m$, 则

$$\sum_{i=1}^n d^+(v_i) = \sum_{i=1}^n d^-(v_i) = m.$$



图的基本定理

推论

任何图 (有向的或无向的) 中, 度数为奇数的顶点个数是偶数.

证明 设 V_o 为度数为奇数的顶点集合, V_e 为度数为偶数的顶点集合. 根据握手定理, 则有

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V_o} d(v) + \sum_{v \in V_e} d(v) = 2m.$$

对于 $\forall v \in V_e$, $d(v)$ 都是偶数, 因此 $\sum_{v \in V_e} d(v)$ 是偶数. 由于 $2m$ 是偶数, 因此 $\sum_{v \in V_o} d(v)$ 是偶数. 由于 $\sum_{v \in V_o} d(v)$ 中的 $d(v)$ 都是奇数, 且偶数个奇数之和才能是偶数, 因此 $|V_o|$ 是偶数.



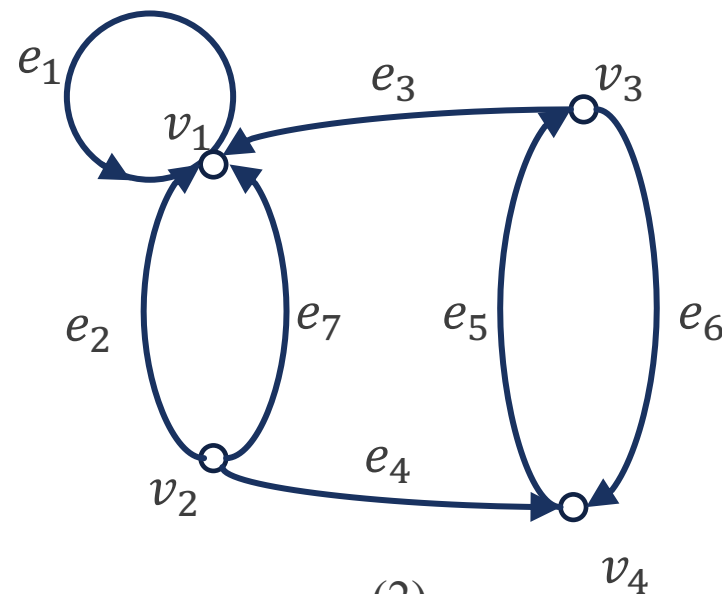
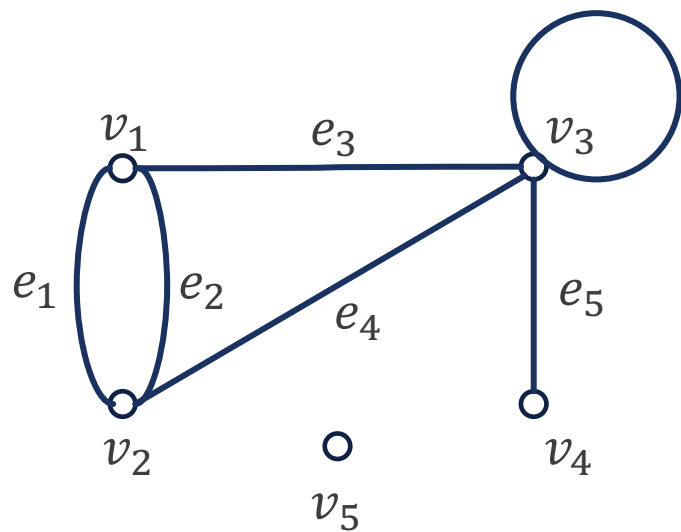
度数列

定义

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为一无向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 称 $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$ 为 G 的**度数列**. 对于有向图, 还可以分出**出度列**和**入度列**.

例 图(1)的度数列为3, 3, 5, 1, 0.

图(2)的度数列为5, 3, 3, 3; 其中出度列为1, 3, 2, 1; 入度列为4, 0, 1, 2.



度数列

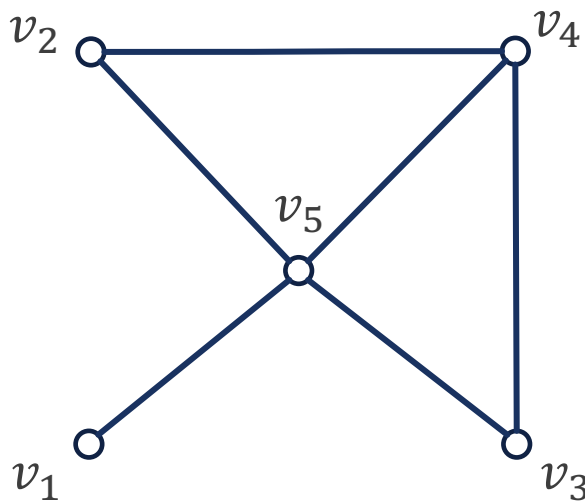
例 7.1 (1) 下面整数列能构成无向图的度数列吗?

(a) 2, 3, 4, 5, 6, 7.

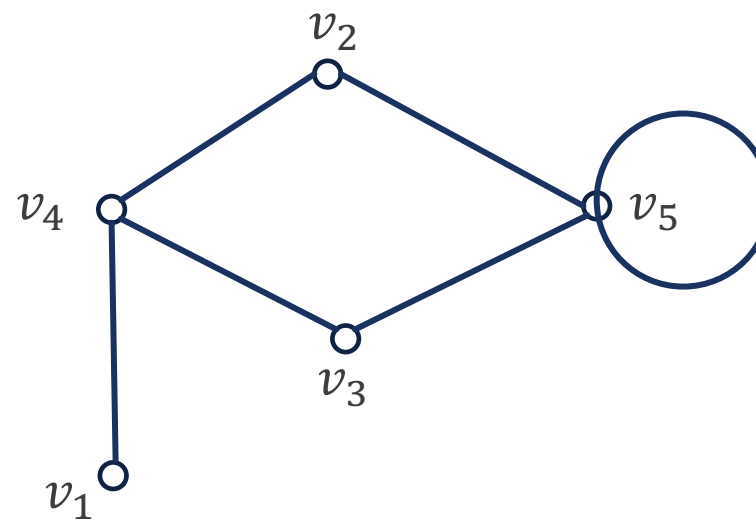
(b) 1, 2, 2, 3, 4.

解 (a)中有3个顶点的度数是奇数, 所以不能构成图的度数列, 否则与握手定理的推论矛盾.

(b) 可以构成多个无向图, 如下所示.



(1)



(2)

例 7.1 (2) 已知图 G 中有11条边, 1个4度顶点, 4个3度顶点, 其余顶点的度数均小于等于2, 问 G 中至少有几个顶点?

解 由握手定理, G 中各顶点度数之和为22. 1个4度顶点, 4个3度顶点共占去16度. 还剩下6度, 其余顶点的度数若全是2, 还需要3个顶点, 所以 G 中至少有 $1+4+3=8$ 个顶点.

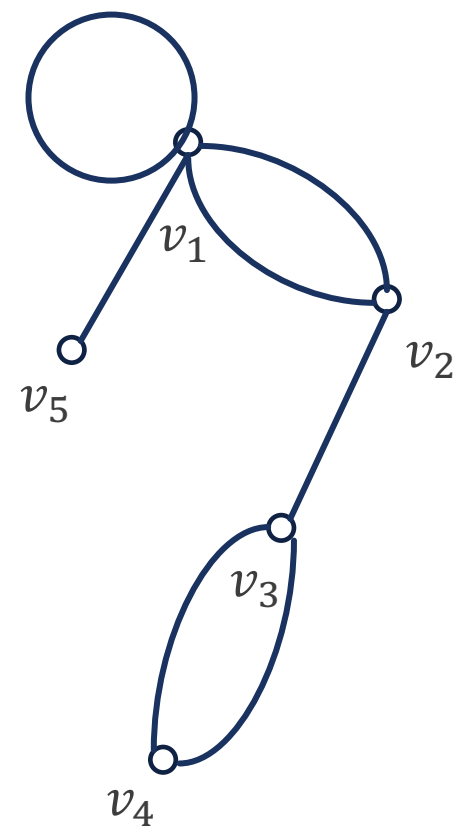
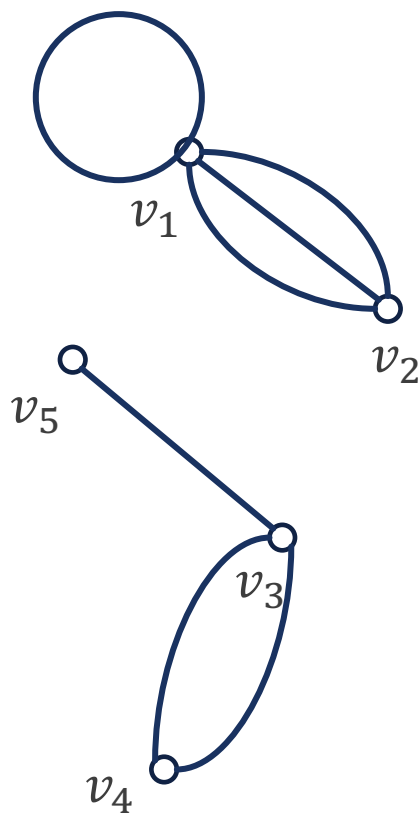
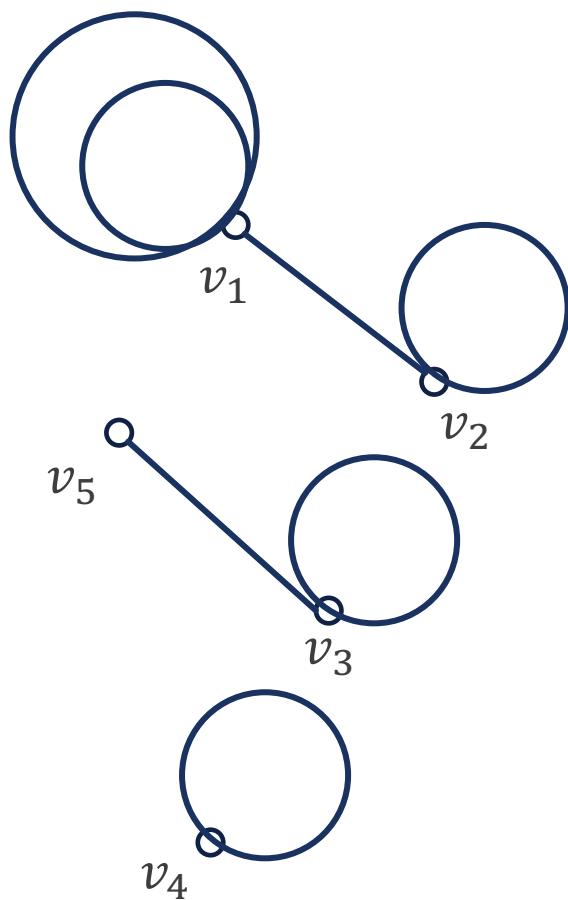
课堂练习

画出3个有度数列 $5, 3, 3, 2, 1$ 的无向图.



课堂练习

画出3个有度数序列 5, 3, 3, 2, 1 的无向图.



定义 7.5

设 G 为 n 阶无向简单图, 若 G 中任意两个不同的顶点都是相邻的, 则称 G 为 n 阶无向完全图记作 K_n .

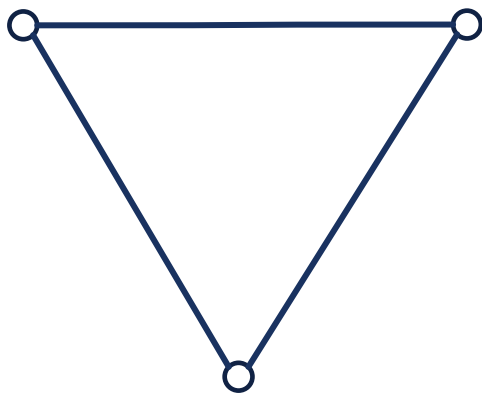
设 D 为 n 阶有向简单图, 若对于任意的 $u, v \in V(D)$ ($u \neq v$), 均有 $\langle u, v \rangle \in E(D)$, $\langle v, u \rangle \in E(D)$, 则称 D 是 n 阶有向完全图.

- 在无向完全图 K_n 中, 边数 $m = C_n^2 = n(n-1)/2$.
- 在有向完全图中, 边数 $m = 2C_n^2 = n(n-1)$.

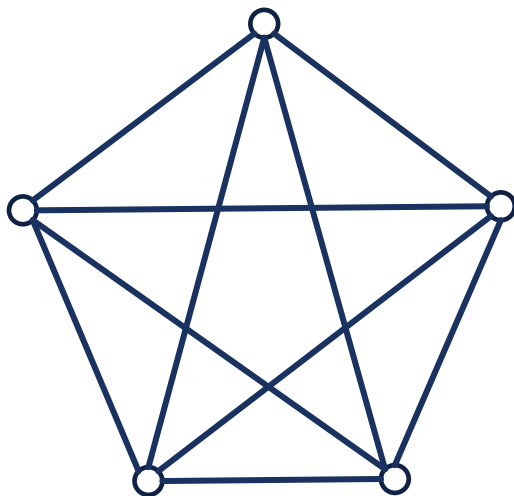


完全图

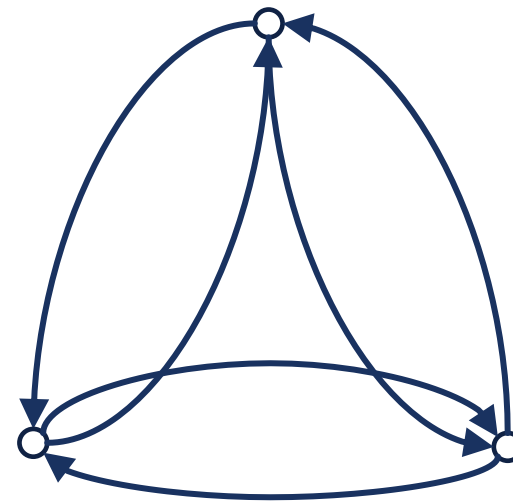
- 例 (1)和(2)分别是无向完全图 K_3 和 K_5 , (3)是3阶有向完全图.



(1)



(2)



(3)

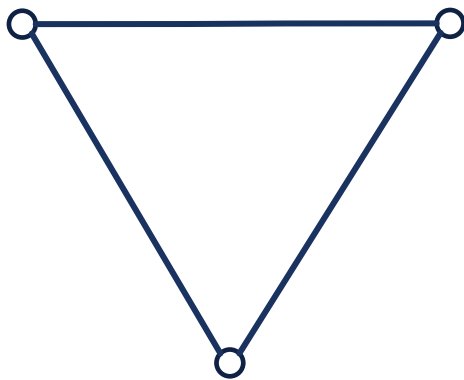


正则图

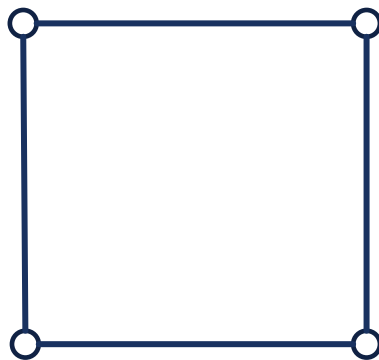
定义 7.6

设 $G = \langle V, E \rangle$ 无向简单图, 若 $\Delta(G) = \delta(G) = k$, 即各顶点度数均等于 k , 则称图 G 为 k -正则图.

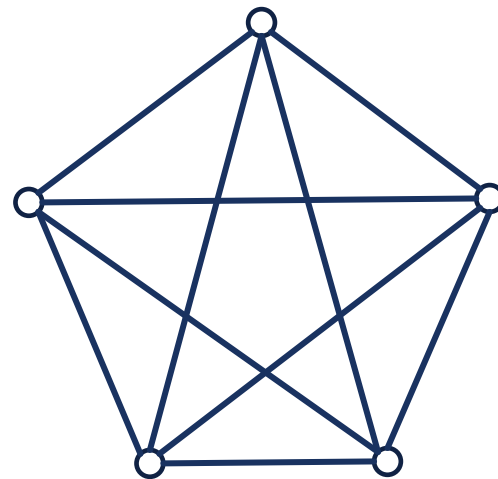
- 由握手定理可知, n 阶 k -正则图的边数 $m = kn/2$. 所以, k 和 n 中至少必有一个为偶数.
- K_n 都是 $(n - 1)$ -正则图.



2-正则图



2-正则图



4-正则图



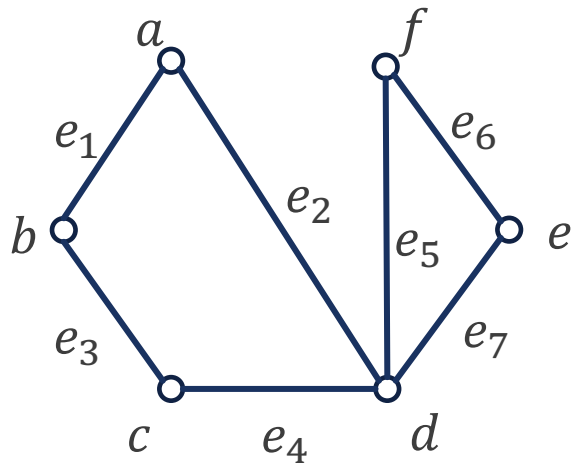
定义 7.7

设 $G = \langle V, E \rangle$ 和 $G' = \langle V', E' \rangle$ 是两个图 (两图同为无向的或有向的).

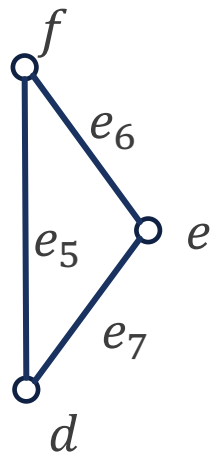
- (1) 若 $V' \subseteq V, E' \subseteq E$, 则称 G' 是 G 的子图, G 是 G' 的母图, 记作 $G' \subseteq G$;
- (2) 若 $V' \subset V, E' \subset E$, 称 G' 是 G 的真子图;
- (3) 若 $G' \subseteq G$ 且 $V' = V$, 称 G' 是 G 的生成子图;
- (4) 若 $\emptyset \neq V_1 \subseteq V$, 以 V_1 为顶点集, 以两个端点均在 V_1 中的全体边为边集的 G 的子图, 称为 V_1 导出的导出子图, 记作 $G[V_1]$;
若 $\emptyset \neq E_1 \subseteq E$, 以 E_1 为边集, 以 E_1 中的边关联的顶点全体为顶点集的 G 的子图, 称为 E_1 导出的导出子图, 记作 $G[E_1]$.

子图

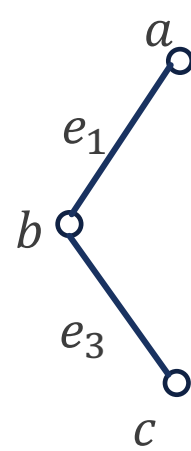
- 在下图中, (1), (2), (3)都是(1)的子图, 其中(2), (3)是真子图. (1), (3)是(1)的生成子图.
- (2)既可以看成 $V_1 = \{d, e, f\}$ 的导出子图 $G[V_1]$, 也可以看成 $E_1 = \{e_5, e_6, e_7\}$ 的导出子图 $G[E_1]$.
- (3)可以看成 $E_2 = \{e_1, e_3, e_5, e_7\}$ 导出的子图 $G[E_2]$, 但是**不能**看成是 $V_2 = \{a, b, c, d, e, f\}$ 的导出子图 $G[V_2]$.



(1)



(2)



(3)

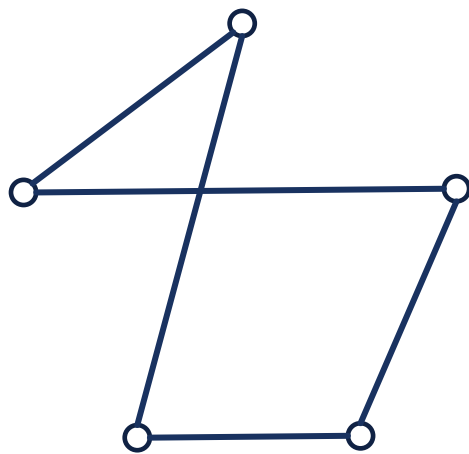


补图

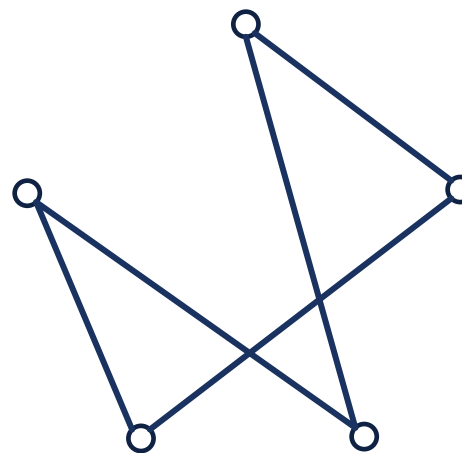
定义 7.8

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为 n 阶无向简单图. 以 V 为顶点集, 以 K_n 中所有不在 G 中的边组成的集合为边集的图, 称为 G 相对于 K_n 的补图, 简称为 G 的补图, 记作 \bar{G} .

- 补图都是**针对完全图而言**, 而且只针对边求补, 不针对顶点.
- K_n 的补图为 n 阶零图, 反之亦然.
- 在补图 \bar{G} 中两个顶点 u 与 v 相邻的充要条件是 u 与 v 在 G 中不相邻.



G



\bar{G}



同构

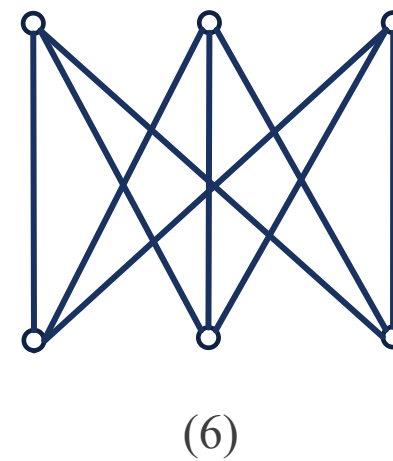
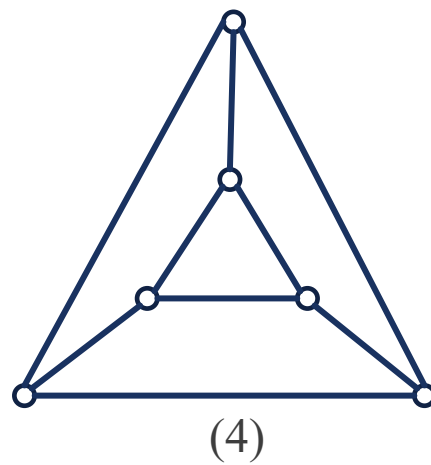
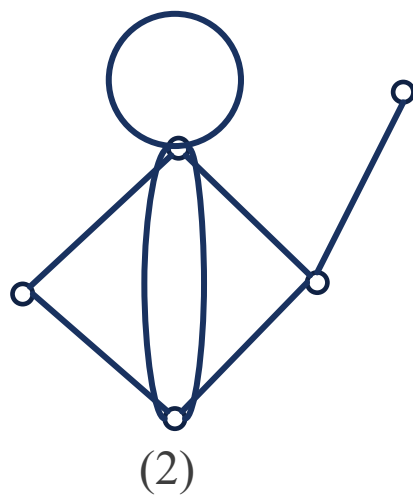
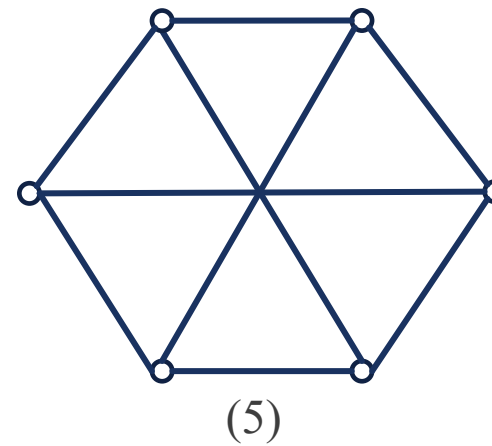
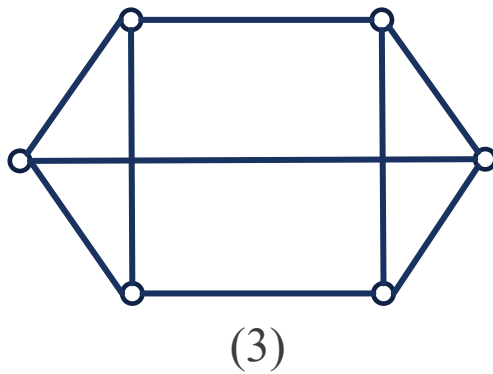
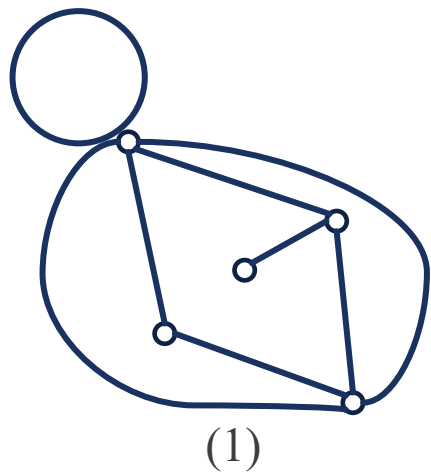
定义 7.9

设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 为两个无向图. 若存在双射函数 $f: V_1 \rightarrow V_2$, 对于任意的 $v_i, v_j \in V_1, e = (v_i, v_j) \in E_1$ 当且仅当 $e' = (f(v_i), f(v_j)) \in E_2$, 且 e 与 e' 重数相同, 则称 G_1 和 G_2 同构, 记为 $G_1 \cong G_2$.

- 类似地可以定义两个有向图之间同构的概念, 只是应该注意方向.
- 图之间的同构关系是全体图集合上的等价关系.
- 同构的图本质上是同一图, 具有相同的结构和二元关系, 只是画法和标号不同而已.
- 到目前为止, 还没有找到判断两个图同构的简单有效的充分判别法.
- 若 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 同构, 则必有 $|V_1| = |V_2|$, $|E_1| = |E_2|$.



- (1)与(2)同构, (3)与(4)同构, (5)与(6)同构.



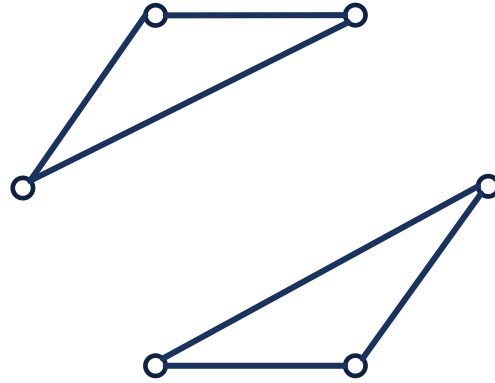
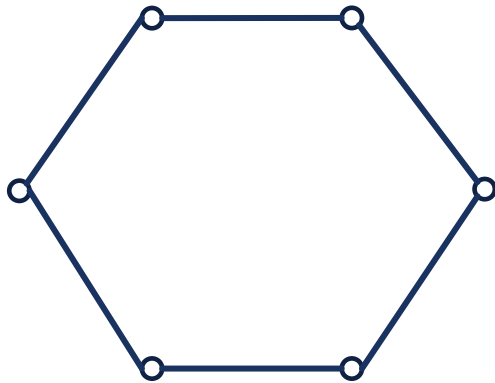
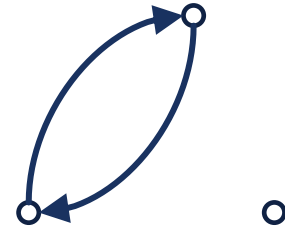
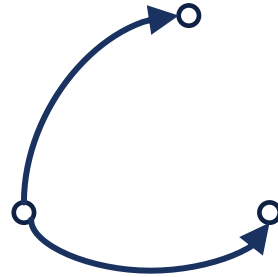
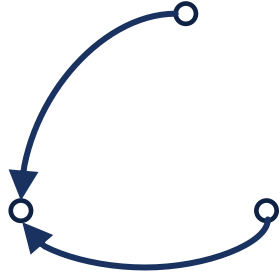
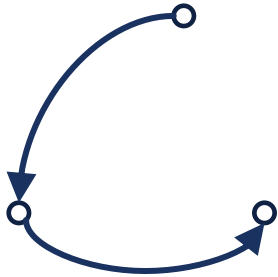
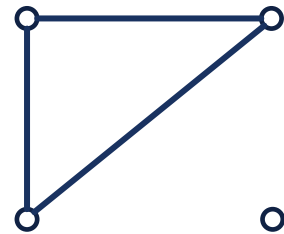
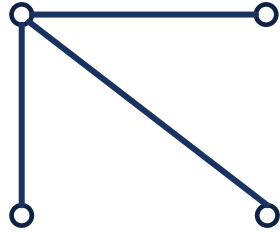
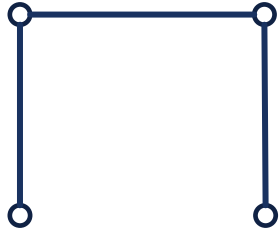
同构

- 对于给定的正整数 n 和 m , 构造出所有非同构的 n 阶 m 条边的无向简单图 (要求 $m \leq n(n-1)/2$), 或有向简单图 (要求 $m \leq n(n-1)$), 是一个比较困难的问题, 但对于较小的 n, m , 还是容易构造出来的.

例 7.2

- (1) 画出4阶3条边的所有非同构的无向简单图.
- (2) 画出3阶2条边的所有非同构的有向简单图.
- (3) 画出2个6阶非同构的2-正则图.





课堂练习

画出5阶4条边的所有非同构的无向简单图.



课堂练习

画出5阶4条边的所有非同构的无向简单图.

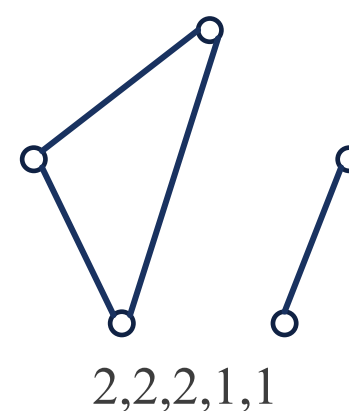
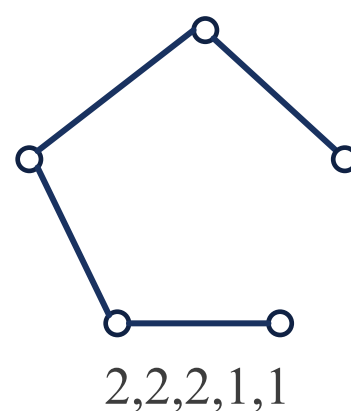
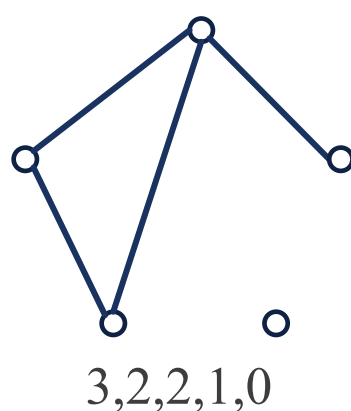
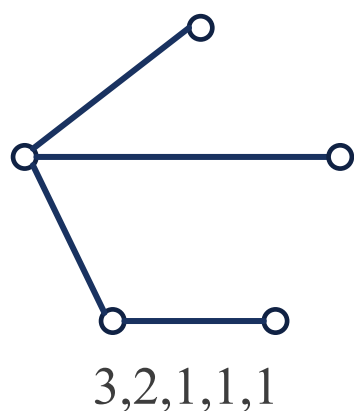
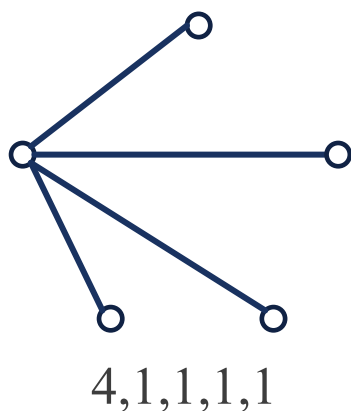
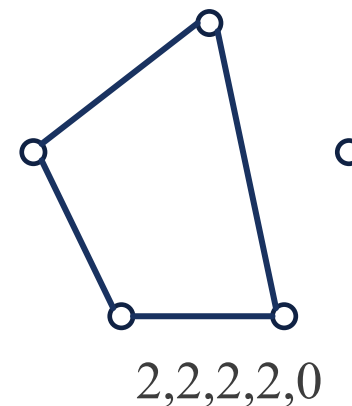
解

由握手定理可知, 所画的图各顶点的度数之和为8, 最大度 ≤ 4 .

一共有五种度数列

$(4,1,1,1,1)$, $(3,2,1,1,1)$, $(3,2,2,1,0)$, $(2,2,2,1,1)$, $(2,2,2,2,0)$.

其中度数列 $(2,2,2,1,1)$ 有两种非同构图.



7.2 图的连通性

通路和回路

- 图的最基本性质是它是否是连通的。

定义 7.10

给定图 $G = \langle V, E \rangle$, 设 G 中**顶点和边的交替序列**为 $\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_l v_l$. 其中 v_{i-1} 和 v_i 是 e_i 的端点 (G 为有向图时, 要求 v_{i-1} 是 e_i 的始点, v_i 是 e_i 的终点), $i = 1, 2, \dots, l$. 称 Γ 为 v_0 到 v_l 的**通路**, v_0 和 v_l 分别称为通路 Γ 的**始点**和**终点**. Γ 中所含边数 l 称为 Γ 的**长度**. 若 $v_0 = v_l$, 则称通路 Γ 为**回路**.

若 Γ 中的所有边互不相同, 则称 Γ 为**简单通路**; 此时, 又若 $v_0 = v_l$, 则称 Γ 为**简单回路**.

若 Γ 中除 v_0 与 v_l 的所有顶点互不相同 (从而所有边也互不相同), 则称 Γ 为**初级通路或路径**. 此时, 又若 $v_0 = v_l$, 则称 Γ 为**初级回路或圈**.

若 Γ 中的有边重复, 则称 Γ 为**复杂通路**; 有边重复出现的回路称为**复杂回路**.

- 按照要求严格程度递进: 通路(回路) \rightarrow 简单通路(回路) \rightarrow 初级通路(回路).

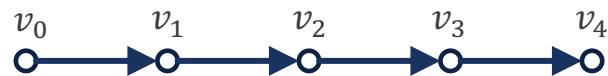


通路 & 回路

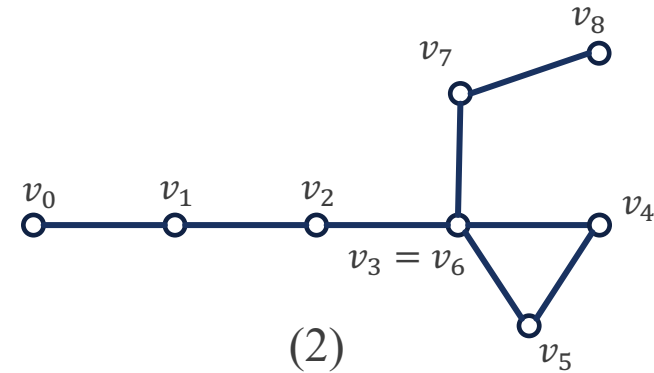
- (1)(3)为 v_0 到 v_4 的长度为4的初级通路,同时也是简单通路.
- (2)(4)为 v_0 到 v_8 的长度为8的简单通路,但是它不是初级的.



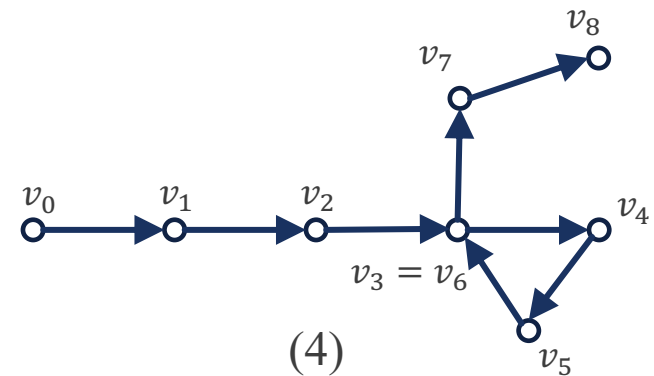
(1)



(3)



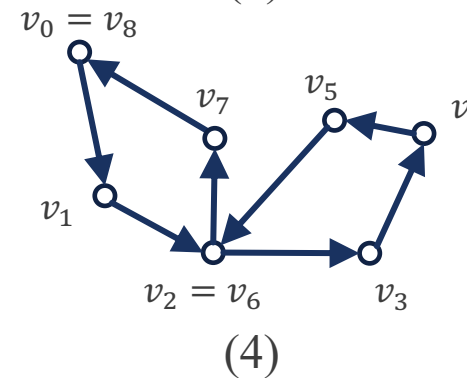
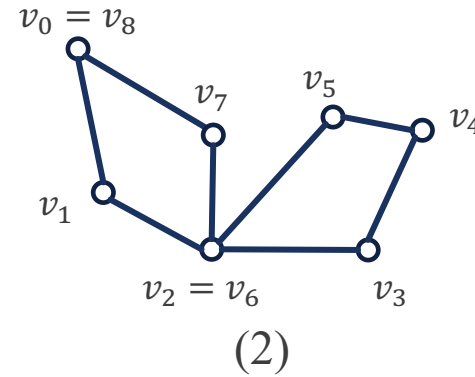
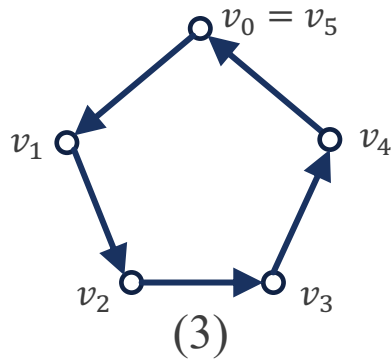
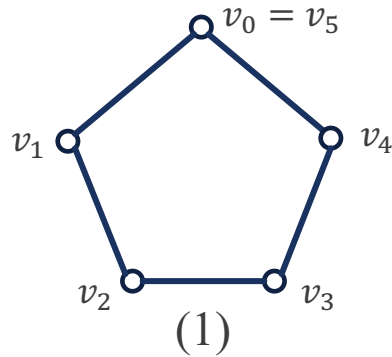
(2)



(4)

通路 & 回路

- (1)(3)为 v_0 到 $v_5(=v_0)$ 的长度为5的初级回路,同时也是简单回路.
- (2)(4)为 v_0 到 $v_8(=v_0)$ 的长度为8的简单回路,但是它不是初级的.



通路 & 回路

- 在无向图中，长度为1和2的初级回路分别由环和两条平行边构成。
 - 一条边来回各走一次，得到一条长度为2的复杂回路。
- 在无向简单图中，若有初级回路，则长度 ≥ 3 。
- 在有向图中，长度为1的初级回路由环构成。
- 在有向简单图中，若有初级回路，则长度 ≥ 2 。
- 对于简单图来说，也可以只用顶点的序列表示通路与回路，将 Γ 表示为 $v_0 v_1 \dots v_l$ 。

定理 7.3

在 n 阶图中, 若从顶点 u 到 v ($u \neq v$) 存在通路, 则从 u 到 v 存在长度小于等于 $n - 1$ 的初级通路.

证明 设 $\Gamma = v_0 e_1 v_1, e_2 \dots e_l v_l$ ($v_0 = u, v_l = v$) 为 u 到 v 的通路. 我们可以通过构造性的方式生成一条从 u 到 v 的初级通路.

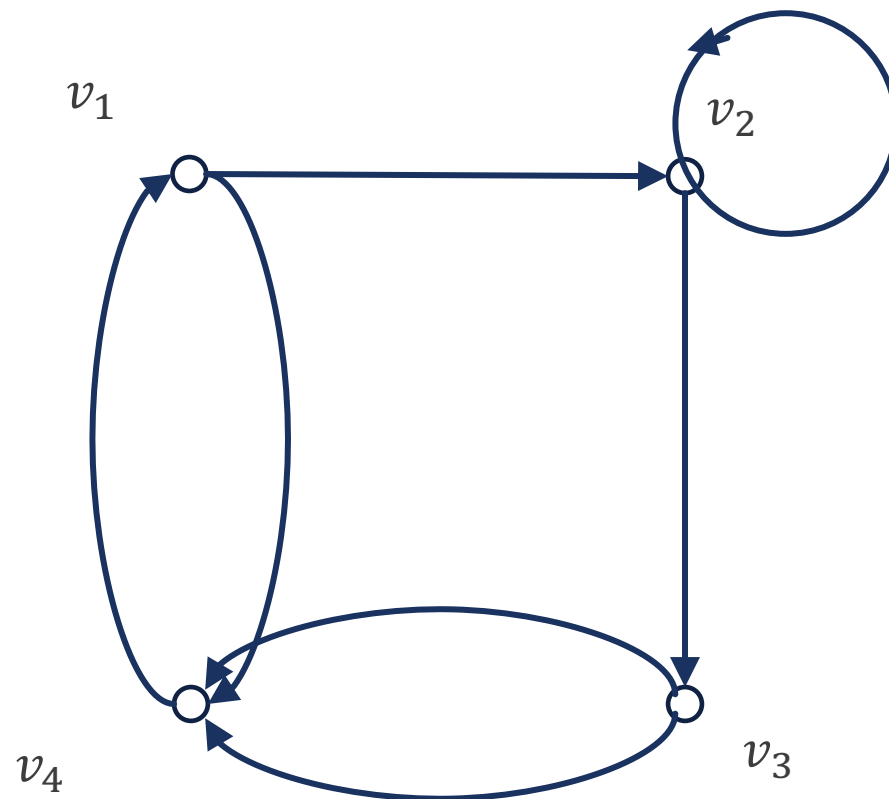
若不是初级通路, 则必存在 $t < s$ 有 $v_t = v_s$. 在 Γ 中去掉从 v_t 到 v_s 的这一段, 所得到的通路仍为 u 到 v 的通路. 若还有重复的点出现, 就做同样的处理, 直到无重复出现的顶点为止. 最后得到的通路就是 u 到 v 的初级通路.

由于通路中的顶点都不相同, 至多有 n 个, 所以它的长度小于等于 $n - 1$.



课堂练习

假设从不同顶点出发的回路是不同的，那么该有向图中共有多少条长度为4的回路？



课堂练习

假设从不同顶点出发的回路是不同的, 那么该有向图中共有多少条长度为4的回路?

解

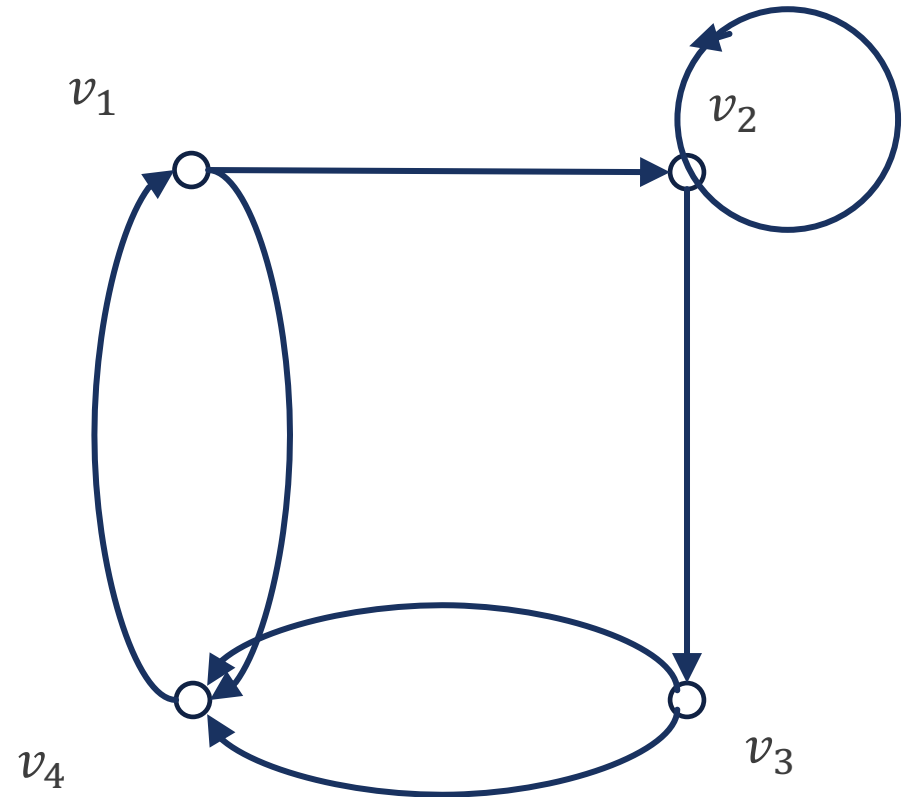
以 v_1 为始点: $v_1v_4v_1v_4v_1$, $v_1v_2v_3v_4v_1 \times 2$.

以 v_2 为始点: $v_2v_2v_2v_2v_2$, $v_2v_3v_4v_1v_2 \times 2$.

以 v_3 为始点: $v_3v_4v_1v_2v_3 \times 2$.

以 v_4 为始点: $v_4v_1v_4v_1v_4$, $v_4v_1v_2v_3v_4 \times 2$.

共11种.



连通

■ 同理可证以下定理

定理 7.3

在 n 阶图中, 如果存在 v 到自身的回路, 则从 v 到自身存在长度不超过 n 的初级回路.

定义 7.11

在无向图 G 中, 若顶点 u, v 之间存在通路, 则称 u, v 是**连通的**. 规定 v 与自身是连通的.

若无向图 G 是平凡图, 或 G 中任意二顶点都是连通的, 则称 G 是**连通图**, 否则称 G 是**非连通图**.



连通

- 无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 顶点间的连通关系 R 是 V 上的一个等价关系,

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in G \text{ 且 } x \text{ 与 } y \text{ 连通} \},$$

它的所有等价类构成 V 的一个划分. 任意两个顶点 v_i 和 v_j 属于同一个等价类当且仅当它们有路相连通.

定义

设 $G = \langle V, E \rangle$, R 将 V 划分为等价类 V_1, V_2, \dots, V_k , 称它们的导出子图 $G[V_i]$ ($i = 1, 2, \dots, k$) 为 G 的**连通分支**, 连通分支数 k 记作 $p(G)$.

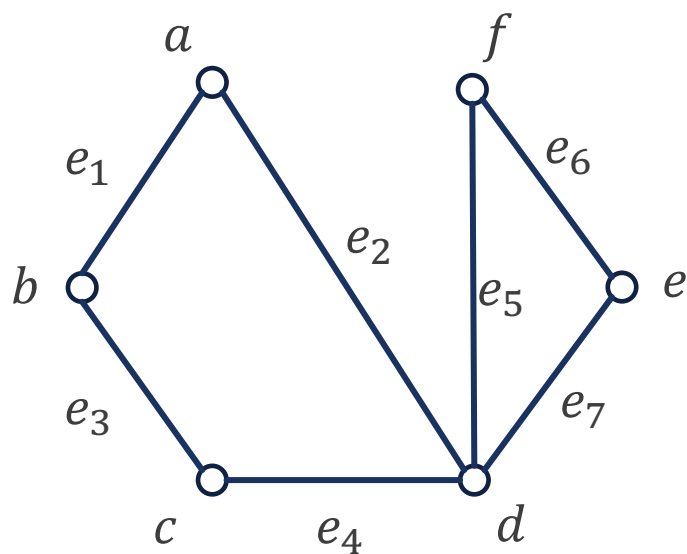
- G 是连通图 $\Leftrightarrow p(G) = 1$. G 是非连通图 $\Leftrightarrow p(G) \geq 2$.



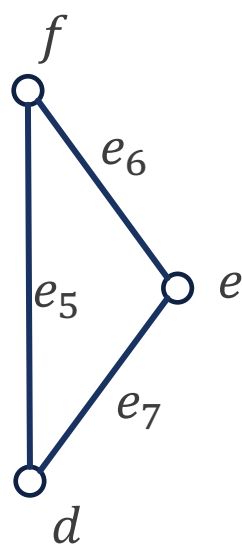
连通

例 (1), (2)为连通图.

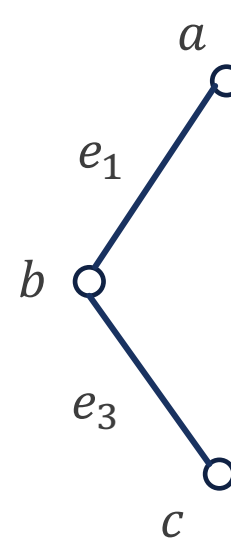
(3)是具有两个连通分支的非连通图, 但是并不是(1)的连通分支.



(1)



(2)



(3)

距离

定义

设 u, v 为无向图 G 中任意两个顶点, 若 u 与 v 是连通的, 则称 u 与 v 之间**长度最短的通路**为 u 与 v 之间的**短程线**. 短程线的长度称为 u 与 v 之间的**距离**, 记作 $d(u, v)$. 若 u 与 v 不连通时, 规定 $d(u, v) = \infty$.

■ 无向图的距离定义满足**欧式距离**三条公理:

(1) 非负性: $d(v_i, v_j) \geq 0$, 并且当且仅当 $v_i = v_j$ 时, 等号成立.

(2) 三角不等式: $\forall v_i, v_j, v_k \in V(G)$, 有

$$d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) \geq d(v_i, v_k).$$

(3) 对称性: $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$.



距离

- 对无向连通图 G 来说,常由删除 G 中的一些顶点或删除一些边,而破坏其连通性. 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为一无向图.
 - (1) 设 $e \in E$, 用 $G - e$ 表示从 G 中去掉边 e , 称为删除 e . 又设 $E' \subset E$, 用 $G - E'$ 表示从 G 中删除 E' 中的所有边, 称为删除 E' .
 - (2) 设 $v \in V$, 用 $G - v$ 表示从 G 中去掉 v 及 v 关联的一切边, 称为删除 v . 又设 $V' \subset V$, 用 $G - V'$ 表示从 G 中删除 V' 中的所有顶点, 称为删除 V' .
- 没边, 顶点自己可以生存, 但是没了顶点, 边无法自己生存. 所以删顶点必须要删关联的边, 但是删边不需要删关联的顶点.



割集

- **连通性**是图的最为重要性质之一. 图的连通性在计算机网络, 交通网和电力网等方面有着重要的应用.
- 实际问题中, 除了考察一个图是否连通外, 往往还要研究一个图**连通的程度**, 作为系统的可靠性度量.

定义 7.12

设 $G = \langle V, E \rangle$, 若 $V' \subset V$ 使得 $p(G - V') > p(G)$, 且对于 $\forall V'' \subset V'$, 均有 $p(G - V'') = p(G)$, 则称 V' 是 G 的**点割集**. 若点割集中只有一个顶点, 则称该顶点为**割点**. 类似地, 若 $E' \subset E$ 使得 $p(G - E') > p(G)$, 且对于 $\forall E'' \subset E'$, 均有 $p(G - E'') = p(G)$, 则称 E' 是 G 的**边割集**, 简称**割集**. 若边割集中只有一条边, 则称该边为**割边**或**桥**.

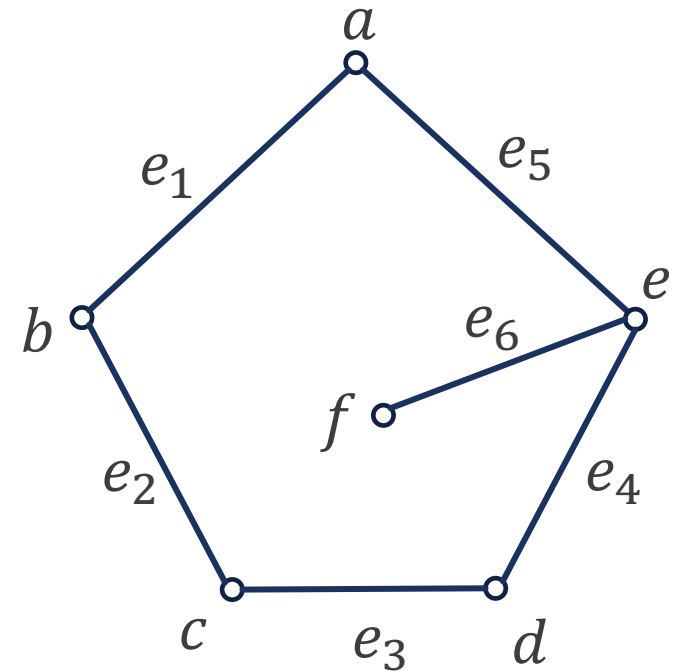
- 点(边)割集有着**最小**的概念, 不存在它的真子集是 G 的点(边)割集.



割集

例

- $\{e\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, d\}$ 等都是点割集, 其中 e 是割点.
- $\{a\}$, $\{b, e\}$, $\{a, c, d\}$ 等都不是点割集.
- $\{e_6\}$, $\{e_1, e_5\}$, $\{e_1, e_3\}$ 等都是边割集, 其中 e_6 是桥.
- $\{e_1, e_6\}$, $\{e_2, e_3, e_4\}$ 等都不是边割集.



割集

从定义可以看出以下几点:

1. 完全图 K_n 无点割集, 因为从 K_n 中删除 $k(k \leq n - 1)$ 个顶点后, 所得图仍然是连通的.
 - K_n 删除任一顶点后, 变为 K_{n-1} .
2. n 阶零图既无点割集, 也无边割集.
3. 若 G 是连通图, E' 是 G 的边割集, 则 $p(G - E') = 2$.
4. 若 G 是连通图, V' 是 G 的点割集, 则 $p(G - V') \geq 2$.
5. G 存在点割集 $\Leftrightarrow G$ 不是完全图.
 - 若 G 不是完全图, 那么 G 包含两个不邻接的顶点, 删除 G 的除这两个顶点外的所有顶点, 即可得到一个不连通图. 即任意一个非完全图都存在点割集.



连通度

对一个连通图来说,若它存在点割集和边割集,就可以用含元素个数最少的点割集和边割集来刻画它的连通程度.

定义 7.13

设 G 是一个无向连通图,称

(1) $\kappa(G) = \min\{|V'| \mid V' \text{ 为 } G \text{ 的点割集或 } V' \text{ 使 } G - V' \text{ 成为平凡图}\}$ 为 G 的点连通度.

(2) $\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E' \text{ 是 } G \text{ 的边割集}\}$ 为 G 的边连通度.

- 图 G 的点连通度是为了使连通图 G 成为一个非连通图或平凡图,需要删除最少的点数. 所以 $\kappa(G) \leq n - 1$.
- 图 G 的边连通度是为了使连通图 G 成为一个非连通图,需要删除最少的边数.
- 规定无向非连通图的点连通度和边连通度都为0.



连通度

从定义可以看出以下几点:

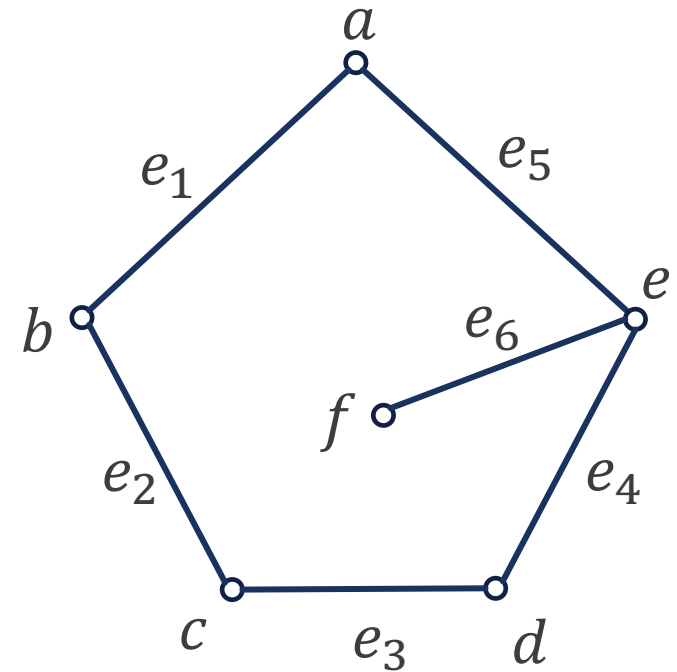
1. 若 G 是平凡图, 它既没有点割集, 也没有边割集, 所以 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$.
2. 若 G 是完全图 K_n , 由于 G 没有点割集, 当删除 $n - 1$ 个顶点后, G 成为平凡图, 所以 $\kappa(G) = n - 1$.
3. 若 G 中存在割点, 则 $\kappa(G) = 1$; 若 G 中存在割边, 则 $\lambda(G) = 1$.

例 该图既有割点又有桥, 因而 $\kappa(G) = \lambda(G) = 1$.

定理 7.5

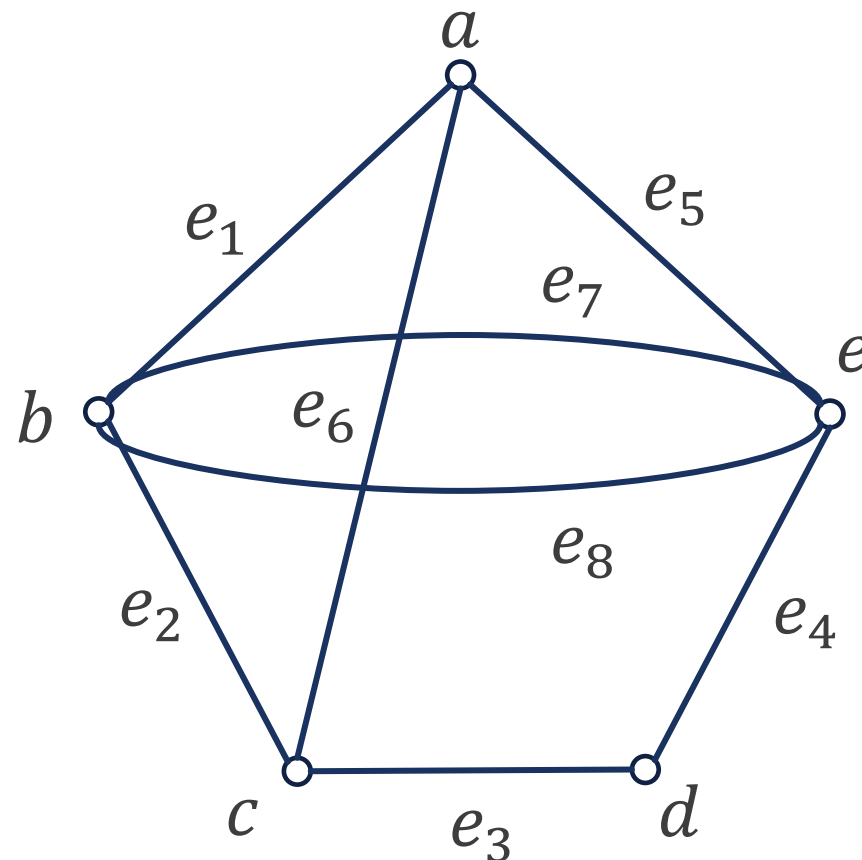
对于任何无向图 G , 有

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$



课堂练习

判断该无向图的点连通度和边连通度.



课堂练习

判断该无向图的点连通度和边连通度.

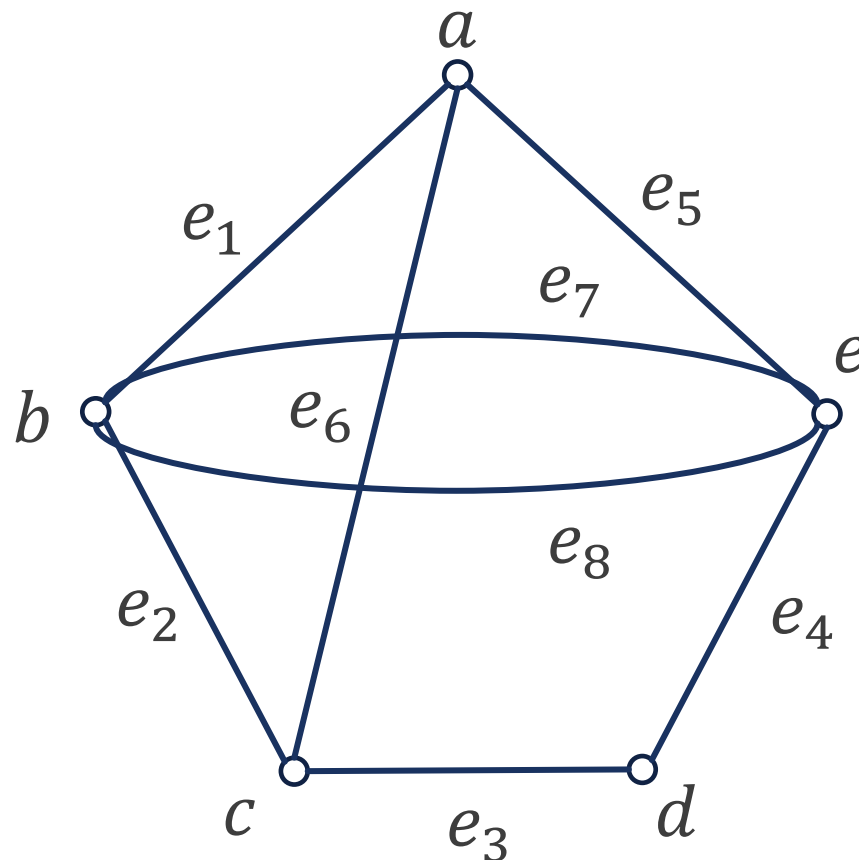
解

删除该图中任意一个顶点都无法破坏其连通性, 因此 $\kappa(G) > 1$.

可以找到点割集 $\{c, e\}$ 使该图成为非连通图, 因此 $\kappa(G) = 2$.

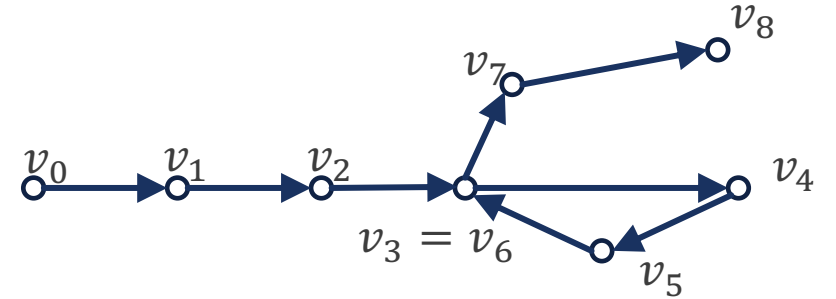
删除该图中任意一条边都无法破坏其连通性, 因此 $\lambda(G) > 1$.

可以找到边割集 $\{e_3, e_4\}$ 使该图成为非连通图, 因此 $\lambda(G) = 2$.



有向图的连通性

- 以上讨论的都是无向图连通的概念和连通度, 下面介绍有向图连通性的概念.



定义 7.14

设 $D = \langle V, E \rangle$ 为一有向图, 若从顶点 v_i 到 v_j 有通路, 则称 v_i 可达 v_j . 规定 v_i 到自身总是可达的. 若 v_i 可达 v_j , v_j 也可达 v_i , 则称 v_i 与 v_j 是相互可达的. v_i 与自身是相互可达的.

若 v_i 可达 v_j , 则称 v_i 到 v_j 长度最短的通路为 v_i 到 v_j 的短程线, 短程线的长度称为 v_i 到 v_j 的距离, 记作 $d\langle v_i, v_j \rangle$. 若 v_i 不可达 v_j , 规定 $d\langle v_i, v_j \rangle = \infty$.

例 在该图中, $d\langle v_0, v_7 \rangle = 4$, $d\langle v_7, v_0 \rangle = \infty$.

注意, 无向图顶点间的距离用圆括号: $d(v_i, v_j)$.

有向图的连通性

- 与无向图中顶点 v_i 与 v_j 之间的距离 $d(v_i, v_j)$ 相比, $d\langle v_i, v_j \rangle$ 除无对称性外, 具有 $d(v_i, v_j)$ 的一切性质:
 - (1) 非负性: $d\langle v_i, v_j \rangle \geq 0$, 并且当且仅当 $v_i = v_j$ 时, 等号成立.
 - (2) 三角不等式: $\forall v_i, v_j, v_k \in V(G)$, 有
$$d\langle v_i, v_j \rangle + d\langle v_j, v_k \rangle \geq d\langle v_i, v_k \rangle.$$
- 有向图 D 两点间的距离**一般不满足对称性**, 即使 $d\langle v_i, v_j \rangle$ 和 $d\langle v_j, v_i \rangle$ 都不是 ∞ , 它们也可能不相等.
- 所以, 连通性不是有向图的顶点集上的等价关系.



有向图的连通性

定义 7.15

设 D 为一有向图,

(1) 若略去 D 中各边的方向所得无向图 (称为**基图**) 是**连通图**, 则称 D 是**弱连通图**或**连通图**.

(2) 若 D 中任意2个顶点至少一个可达另一个, 则称 D 是**单向连通图**.

(3) 若 D 中任意2个顶点都是相互可达的, 则称 D 是**强连通图**.

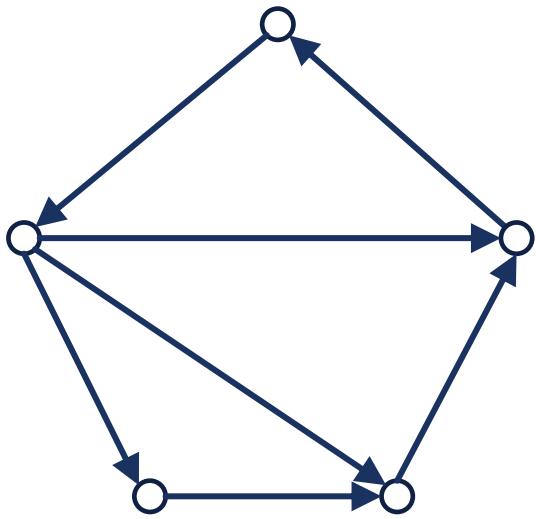
- 若图 D 是强连通的, 则它必是单向连通的; 若图 D 是单向连通的, 则它必是弱连通的.
 - 但这两个命题, 其逆不成立.
 - 有向图的连通性强弱: 强连通图 > 单向连通图 > 弱连通图.



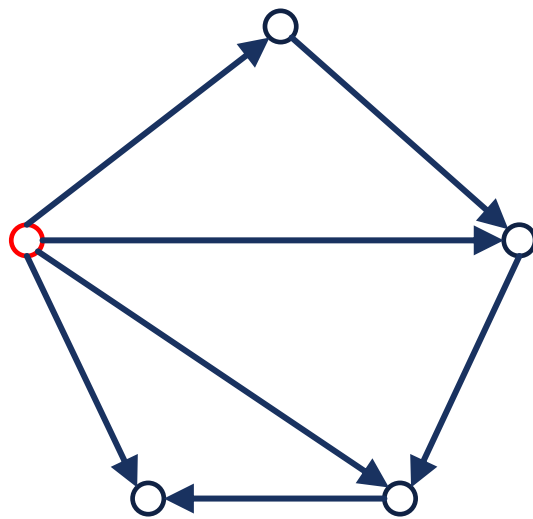
有向图的连通性

例

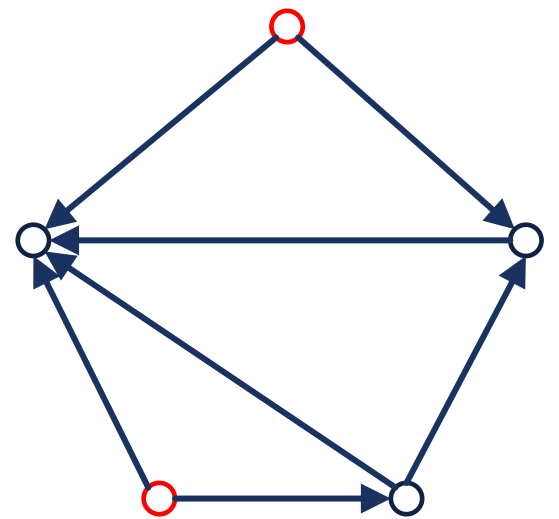
- (1)是强连通的,当然也是单向连通的和弱连通的.
- (2)是单向连通的,也是弱连通的,但不是强连通的.
- (3)是弱连通的,不是单向连通的,更不是强连通的.



(1)



(2)



(3)



有向图连通性的判别方法

有向图连通性的判别定理1

有向图 D 是强连通的当且仅当 D 中存在经过每个顶点至少一次的回路。

证明 充分性 如果 D 中有一个回路，它至少包含每个顶点一次，则在该回路上 D 中任何两个顶点都是相互可达的，即 D 是强连通图。

必要性 设 D 中的顶点为 v_1, v_2, \dots, v_n 。由 D 的强连通性质可知， v_i 可达 v_{i+1} ， $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ，设 Γ_i 为 v_i 到 v_{i+1} 的通路，又有 v_n 可达 v_1 ，设 Γ_n 为 v_n 到 v_1 的通路。于是， $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ 所围回路经过 D 中每个顶点至少一次。

有向图连通性的判别定理2

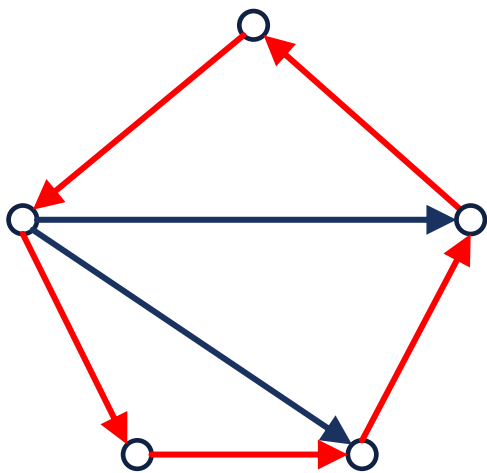
设 D 为 n 阶有向图， D 是单向连通图当且仅当 D 中存在经过每个顶点至少一次的通路。



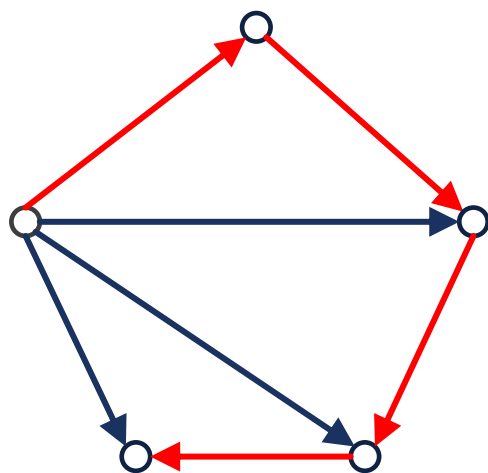
有向图连通性的判别方法

例

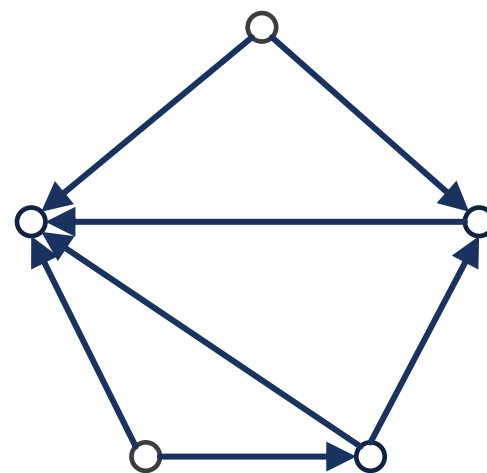
- (1)的外圈是一条回路,它经过所有的顶点,故(1)是强连通的.
- (2)有一个入度为0的顶点和一个出度为0的顶点,不存在经过这两个顶点的回路,所以它不是强连通的.
- (2)的外圈除去左下角的一条边后是一条经过所有顶点的通路,故(2)是单向连通的.
- (3)中有2个入度为0的顶点,不存在经过所有顶点的通路,故不是单向连通的.



(1)



(2)

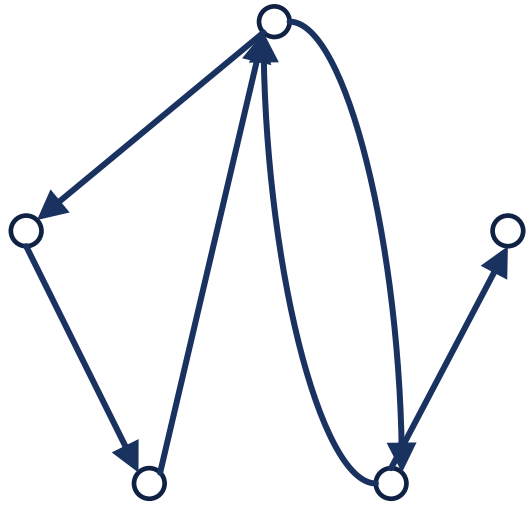


(3)

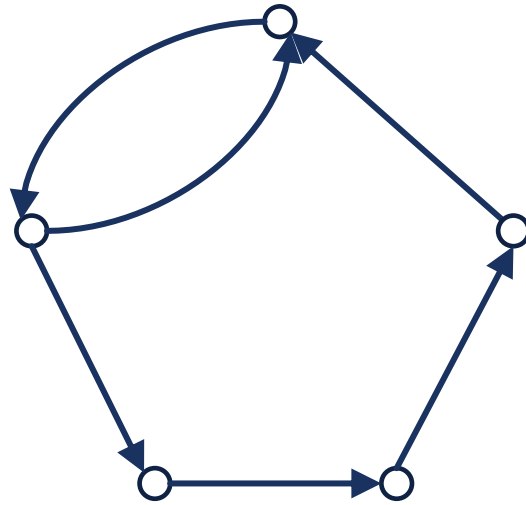


课堂练习

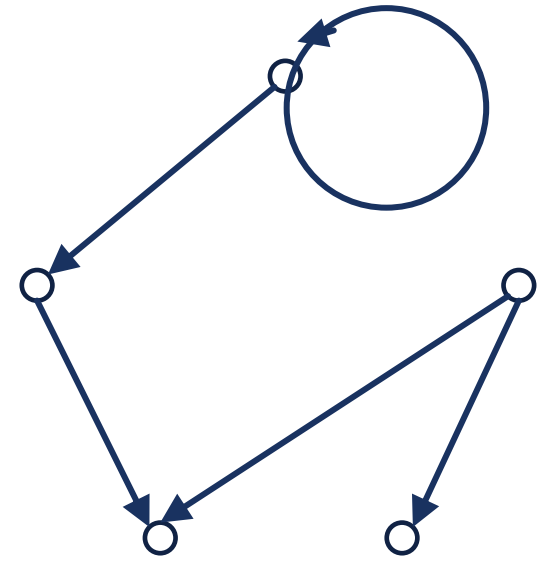
以下图中哪几个是强连通图？哪几个是单向连通图？哪几个是弱连通图？



(1)



(2)



(3)

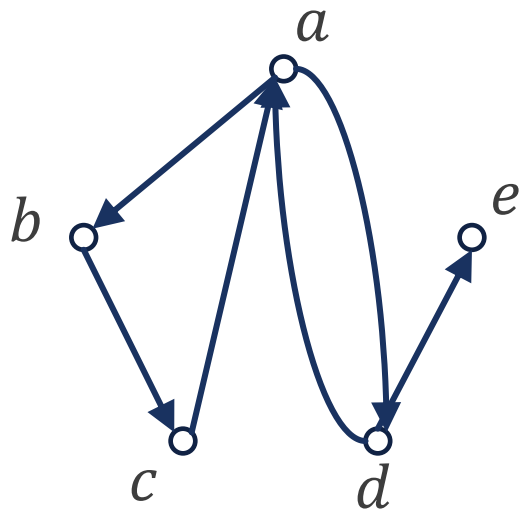
课堂练习

以下图中哪几个是强连通图？哪几个是单向连通图？哪几个是弱连通图？

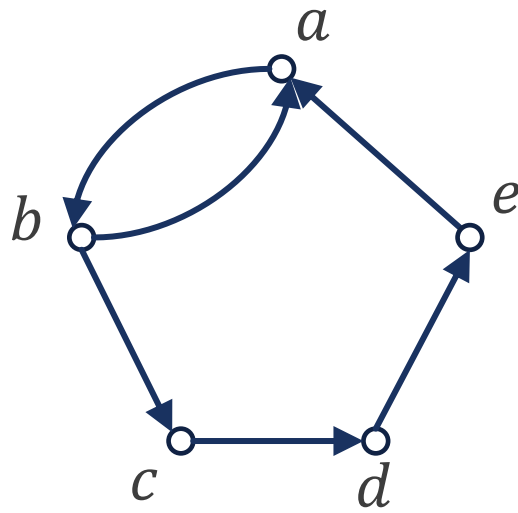
解 (1)中存在经过每个顶点的通路 $abcade$ ，但是无回路，因此是单向连通图，自然也是弱连通图。

(2) 中存在经过每个顶点的回路 $abcdea$ ，所以是强连通图，自然也是单向连通图和弱连通图。

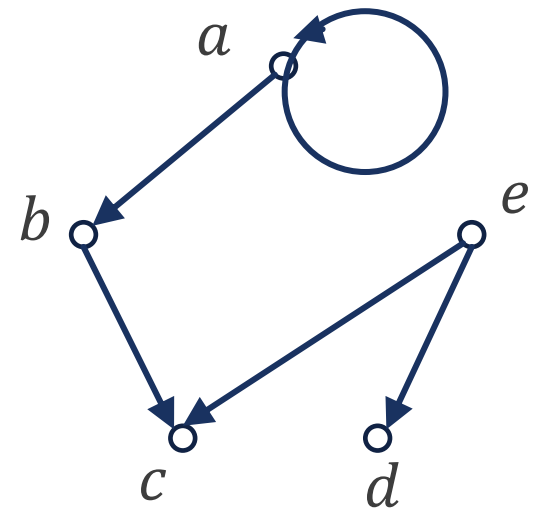
(3) 没有经过每个顶点的通路或回路，但是其基图是连通的，因此是弱连通图。



(1)



(2)



(3)



7.3 图的矩阵表示

图的矩阵表示

- 二元关系, 关系图, 关系矩阵是一一对应的.
- 但是任意图 G 却无法和二元关系一一对应, 因为图是多重集合, 而二元关系是集合.
- 为了方便计算机来处理图, 我们可以用矩阵来表示图, 但是需要注意区分这一节中的矩阵和关系矩阵.

定义

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令 m_{ij} 为顶点 v_i 与边 e_j 的关联次数, 称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 G 的关联矩阵, 记作 $M(G)$.

- 在图的矩阵表示中, 要求图必须是标定图.



无向图的关联矩阵

- m_{ij} 的可能取值有3种:
 - 0: v_i 与 e_j 不关联;
 - 1: v_i 与 e_j 关联次数为1;
 - 2: v_i 与 e_j 关联次数为2, 即 e_j 是以 v_i 为端点的环.

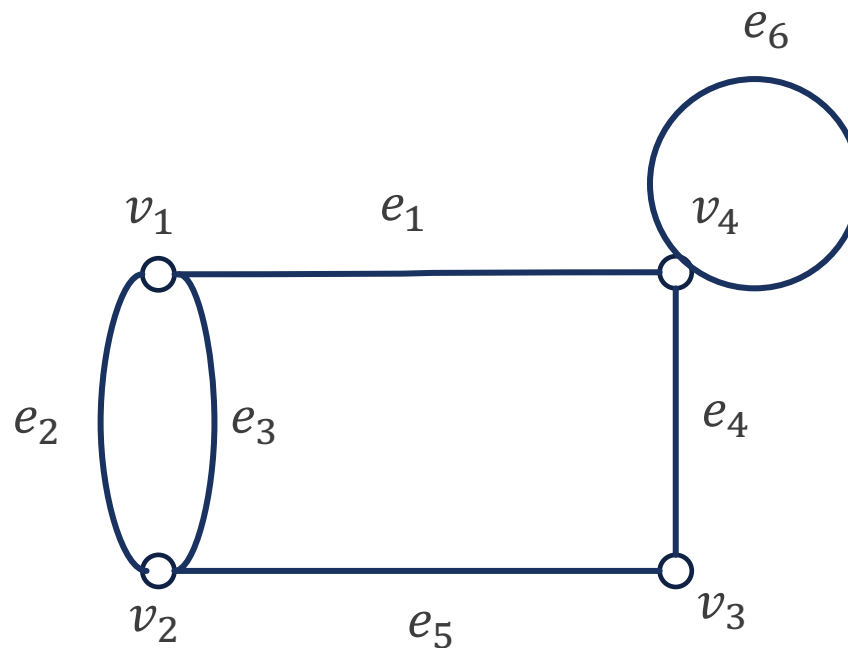
例 7.3 求该图所示无向图的关联矩阵.

解

$$M(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

列是边

行是顶点



无向图的关联矩阵

■ $M(G)$ 有如下性质:

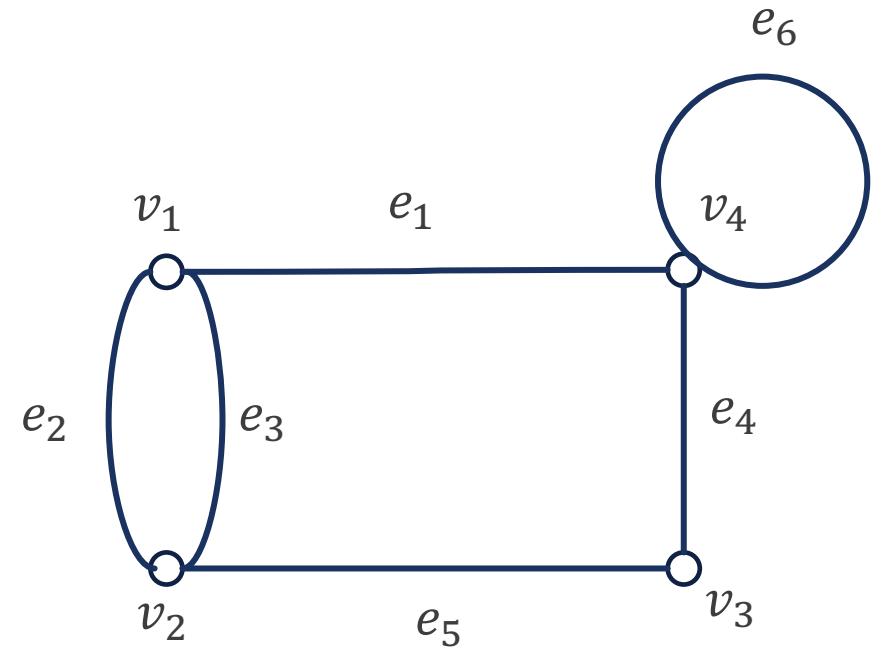
(1) $M(G)$ 每列元素之和为2, 即 $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 2$, 这是因为每条边一定关联两个顶点 (环关联的两个顶点重合).

(2) $M(G)$ 中第 i 行元素之和为 v_i 的度数, 即 $\sum_{j=1}^m m_{ij} = d(v_i)$.

(3) 根据握手定理, 关联矩阵中所有元素之和=各顶点之和=边数的2倍, 即 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} = \sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$.

(4) 第 i 列与第 j 列相同, 当且仅当 e_i 与 e_j 是平行边.

(5) 第 i 行中元素全为0, 即 $\sum_{j=1}^m m_{ij} = 0$, 当且仅当 v_i 为孤立点.



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



有向无环图的关联矩阵

定义

设 $D = \langle V, E \rangle$ 为有向 **无环** 图， $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ， $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ，令

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的起点,} \\ 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联,} \\ -1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的终点,} \end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 D 的关联矩阵，记作 $M(D)$ 。

- 有向有环图没有关联矩阵，因为若 e_j 是 v_i 上的环，则 v_i 既是 e_j 的起点，又是其终点，在 m_{ij} 的取值中没有定义。

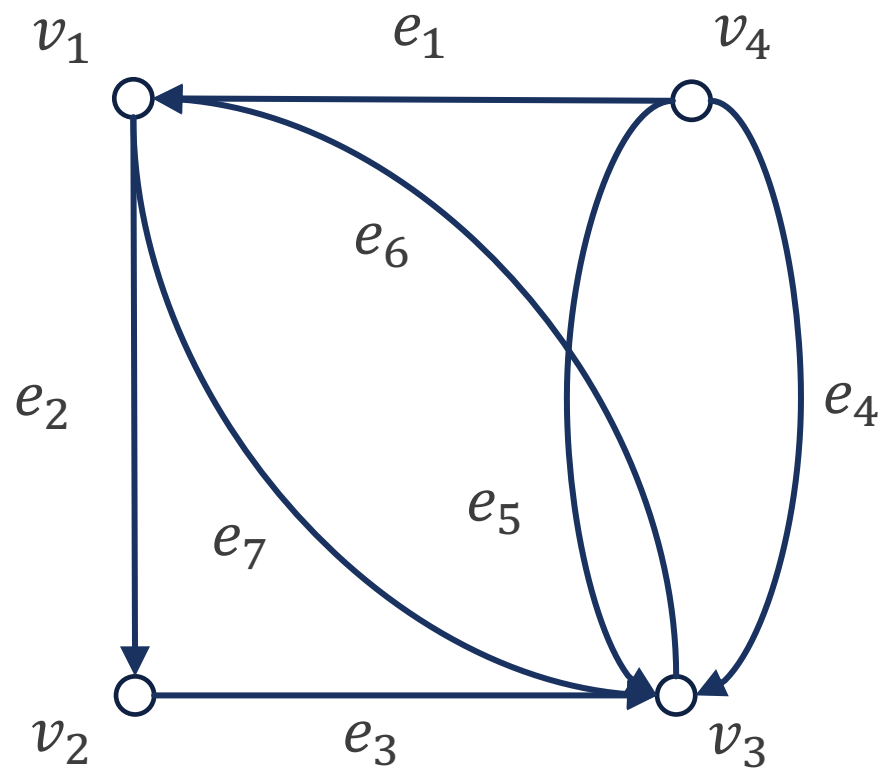


有向无环图的关联矩阵

例 7.4 求该有向无环图的关联矩阵.

解

$$M(D) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



有向无环图的关联矩阵

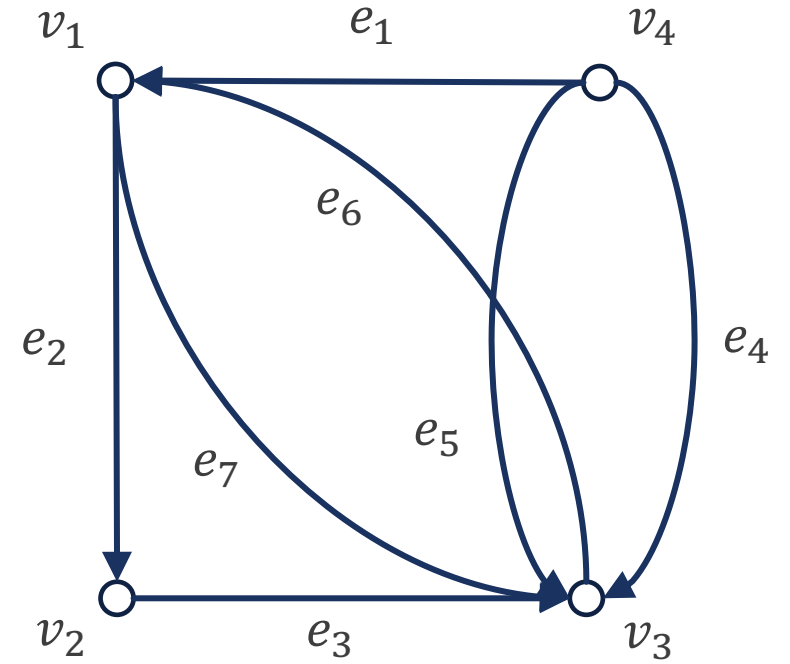
■ 容易看出 $M(D)$ 有如下性质:

(1) D 每列元素之和为0, 即 $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 0$, 这是因为 D 中每条边关联两个顶点, 一个始点, 一个终点.

(2) 第 i 行元素绝对值之和等于 $d(v_i)$, 即 $\sum_{j=1}^m |m_{ij}| = d(v_i)$, 而其中1的个数为出度 $d^+(v_i)$, -1 的个数入度 $d^-(v_i)$.

(3) 矩阵中1的个数与 -1 的个数相等, 都等于 m , 这正说明 D 中各顶点入度之和等于出度之和, 都等于 m , 于是各顶点度数之和等于 $2m$. 这是有向图 D 的握手定理的全部内容.

(4) 若 $M(D)$ 中两列相同, 说明 D 中这两列对应的边有相同的始点和终点, 即它们是平行边.



$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

有向图的邻接矩阵

- 以下讨论的有向图不加限制, 并且**矩阵运算均为普通的乘法和加法**.

定义

设有向图 $D = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = |m|$. 令 $a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 的长度为1的通路数, 即 v_i 与 v_j 相邻, 称 $(a_{ij}^{(1)})_{n \times n}$ 为 D 的邻接矩阵, 记作 $A(D)$.

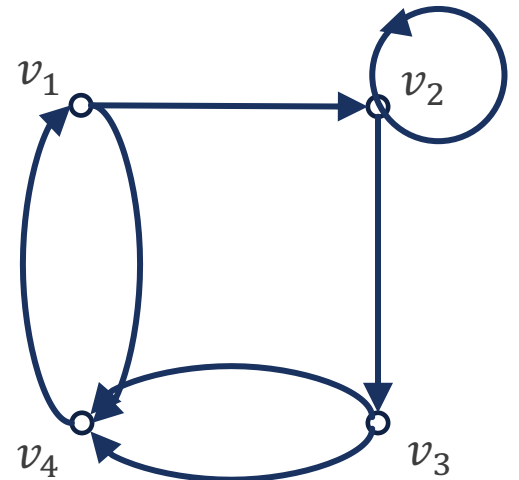
例 7.5 求该有向图 D 的邻接矩阵.

解

$$A(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

列是顶点

行是顶点



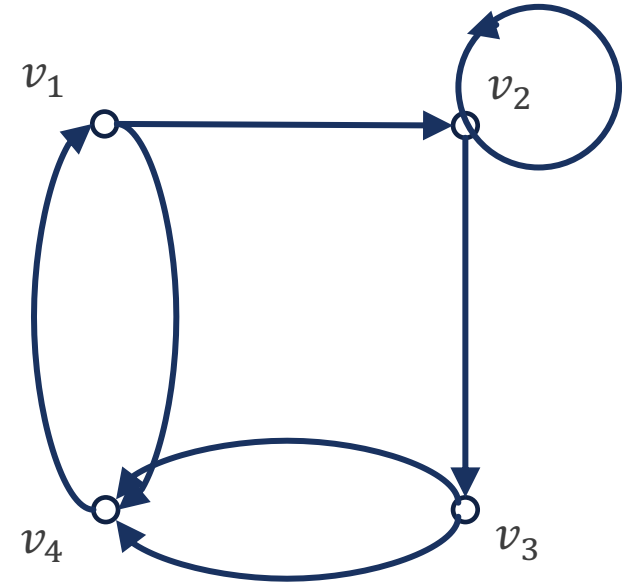
有向图的邻接矩阵

■ 邻接矩阵 $A(D)$ 有如下性质:

(1) 第 i 行元素之和为 v_i 的出度, 即 $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^+(v_i)$.

(2) 第 j 列元素之和为 v_j 的入度, 即 $\sum_{i=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^-(v_j)$.

(3) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)}$ 为 D 中长度为1的通路数, 而 $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(1)}$ 为 D 中长度为1的回路数, 即环的个数.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

有向图的邻接矩阵

- 每条 v_i 到 v_j 的长度为2的通路, 中间必须经过一个顶点 v_r .
- 如果图 G 中有通路 $v_i v_r v_j$ 存在, 那么 $a_{ir}^{(1)} = a_{rj}^{(1)} = 1$.
- 反之, 图 G 中不存在通路 $v_i v_r v_j$, 那么 $a_{ir}^{(1)} = 0$ 或 $a_{rj}^{(1)} = 0$, 即 $a_{ir}^{(1)} a_{rj}^{(1)} = 0$.
- 于是从 v_i 到 v_j 的长度为2的通路数等于

$$a_{i1} a_{1j} + a_{i2} a_{2j} + \cdots + a_{in} a_{nj} = \sum_{r=1}^n a_{ir} a_{rj},$$

这恰好等于矩阵乘法 $A \times A$, 即 A^2 , 中的第 i 行, 第 j 列的元素 $a_{ij}^{(2)}$.

- 所以, A^2 中元素 $a_{ij}^{(2)}$ 表示从 v_i 到 v_j 的长度为2的通路数.
- **注意区分邻接矩阵的次幂和关系矩阵的次幂.**



有向图的邻接矩阵

- 继续推广, 则有以下定理及其推论:

定理 7.6

设 A 是 n 阶有向图的邻接矩阵, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为 D 的顶点集, 则 $A^l (l \geq 1)$ 中元素 $a_{ij}^{(l)}$ 为 v_i 到 v_j 的长度为 l 的通路数, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数, 其中 $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路数.

推论

设 $B_l = A + A^2 + \dots + A^l (l \geq 1)$, 则 B_l 中元素 $b_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 的长度小于等于 l 的通路数, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度小于等于 l 的通路总数, 其中 $\sum_{i=1}^n b_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度小于等于 l 的回路数.

- 按照通路和回路的定义, 只要顶点或边的排列顺序不同就认为是**不同的通路和回路**.



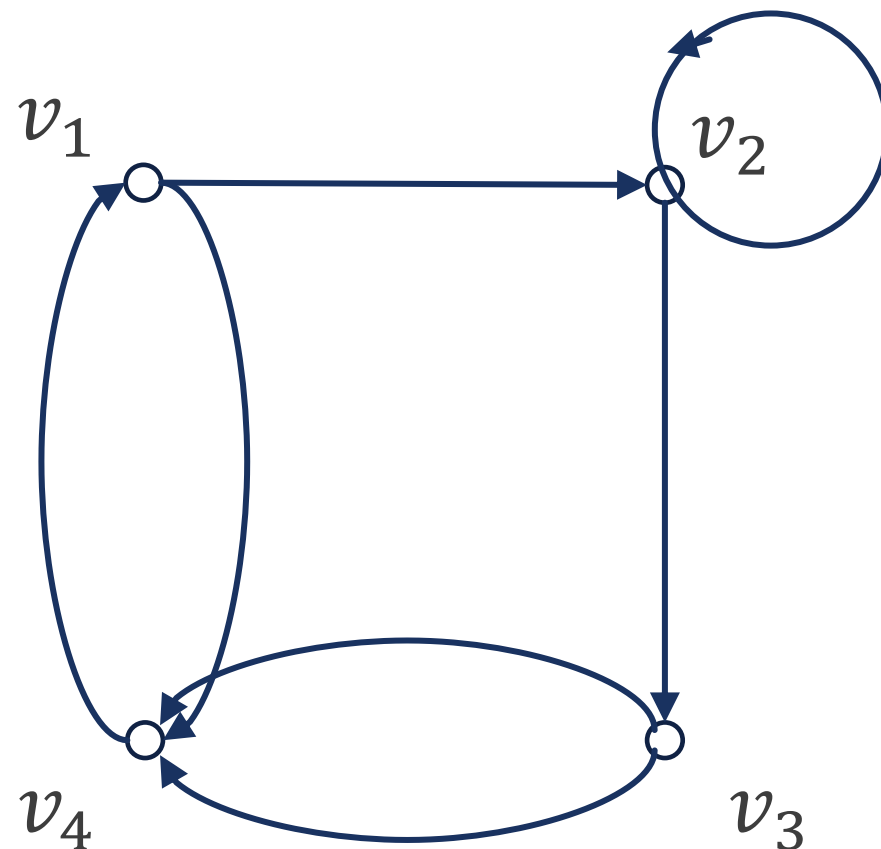
有向图的邻接矩阵

例 计算该图的邻接矩阵的各次幂

解

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- 通过邻接矩阵, 可以轻易计算得出, 图中长度为4的通路共有 $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^{(4)} = 31$ 条, 其中有 $\sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(4)} = 11$ 条是回路.



可达矩阵

- 有时仅关心图中顶点之间是否连通，而不关心顶点之间存在多少条通路和它们的长度。

定义

设有有向图 $D = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. 令

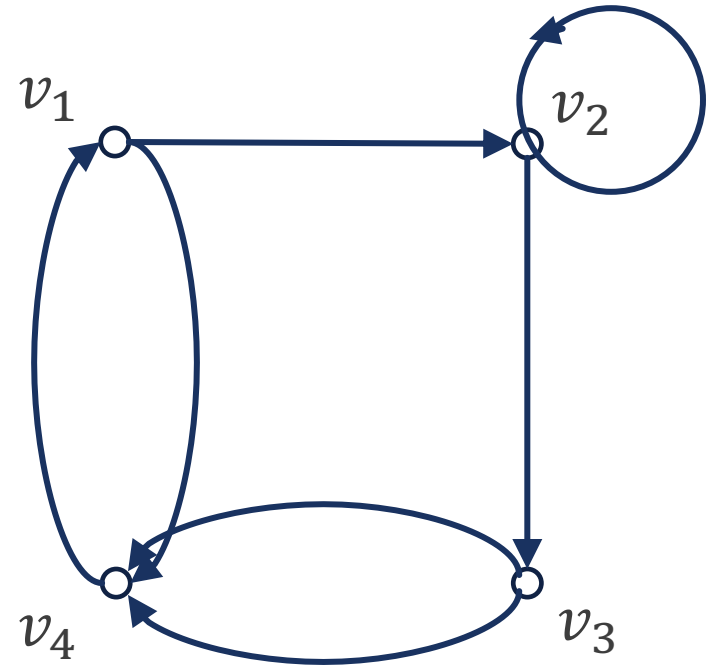
$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 可达 } v_j, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}, \quad i \neq j.$$

$$p_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

称 $(p_{ij})_{n \times n}$ 为 D 的可达矩阵, 记作 $P(D)$, 简记为 P .

例 该有向图是强连通图, 因此可达矩阵 P 中全体元素都是 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$



可达矩阵

可达矩阵有下列性质:

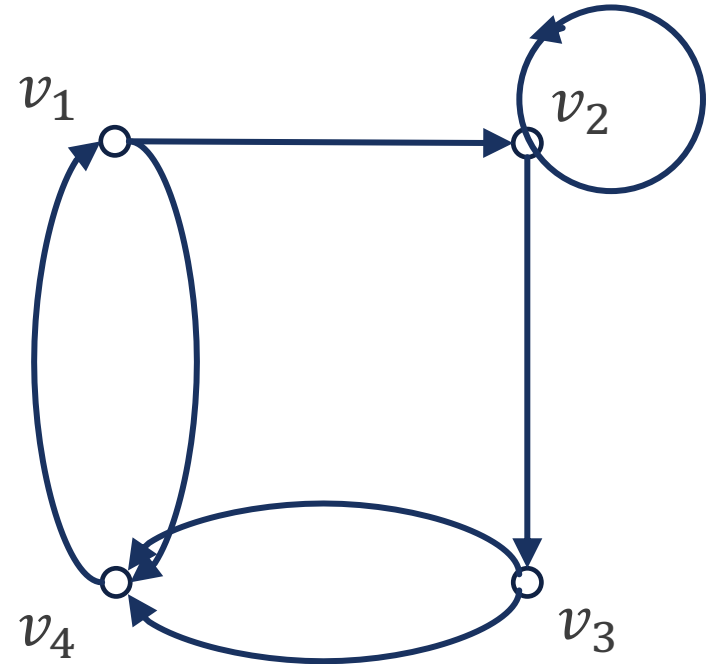
(1) $\forall v_i \in V(D)$, v_i 可达 v_i , 所以 P 的主对角元素 p_{ii} 全为1.

(2) 若 D 是强连通的, 则 P 的全体元素均为1.

(3) 由 D 的邻接矩阵可求 D 的可达矩阵,

$$P(D) = I + B_{n-1},$$

由于 P 中的元素只有0或1, 此处加法为布尔加法.

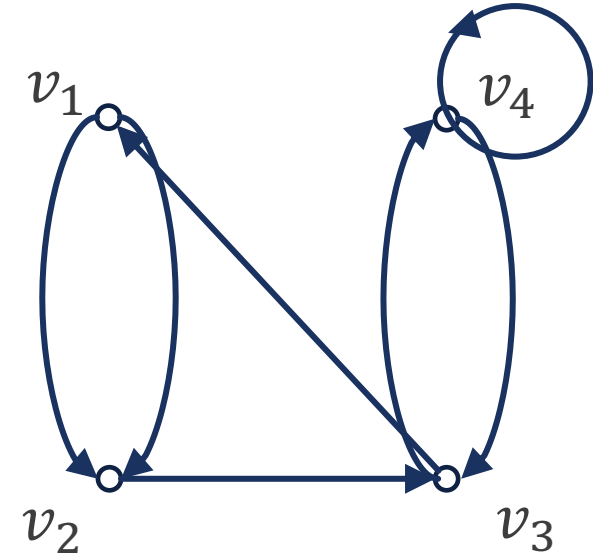


$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

课堂练习

在右图所示的有向图中, 通过邻接矩阵求:

- (1) v_2 到 v_4 长度为3的通路数;
- (2) v_2 到 v_4 长度小于等于3的通路数;
- (3) v_4 到自身长度为3的回路数;
- (4) v_4 到自身长度小于等于3的回路数;
- (5) D 中长度为3的通路 (不含回路) 数;
- (6) D 中长度小于等于3的通路数, 其中有几条是回路?



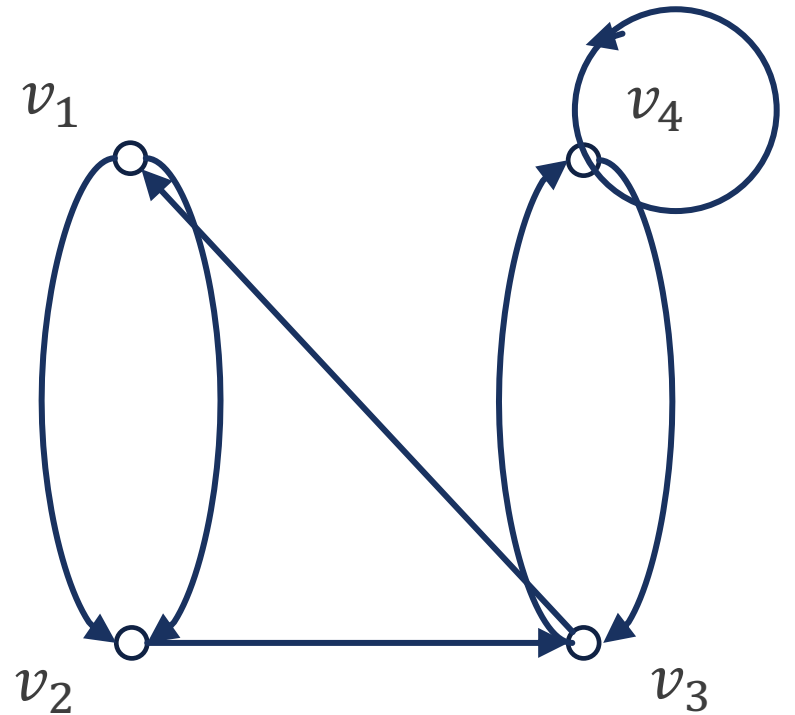
课堂练习

解 先求出 D 的邻接矩阵 A , 及它的前3次幂, 以及 B_2, B_3 .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

- (1) v_2 到 v_4 长度为3的通路数: 1.
- (2) v_2 到 v_4 长度小于等于3的通路数: 2.
- (3) v_4 到自身长度为3的回路数: 3.
- (4) v_4 到自身长度小于等于3的回路数: 6.
- (5) D 中长度为3的通路 (不含回路) 数: $2+1+1+2+1+1+2+2=12$.
- (6) D 中长度小于等于3的通路数, 其中有14条是回路.



作业

p162

1

2

4

7

9

11

12

15



谢谢

有问题欢迎随时跟我讨论

